

微积分 $W \times F$ 习题课笔记¹

一元微积分

夏子睿

2026 年 1 月 11 日


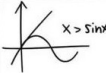
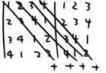
¹PDF 版本请点击: [./main.pdf](#)。当你使用网页浏览讲义时, 如果你需要打包下载所有依赖 PDF 文件, 请点击: [./main.zip](#)。

本课含有以下元素：

$\frac{d^2x}{dx^2} = 2x$ 数学分析	$A = \mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q}^{-1}$ 高等代数	 数学史选讲	$\frac{dy}{dx} \updownarrow f$ 党派纷争
$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$ $f(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (x-x_i)^{r_i}$ 复变函数	证明: $a, b \in \mathbb{N}^*$ $a+b = b+a$ 小学数学	 小猪佩奇 二重积分	 积不出来 自我探究
$T(x,y) = \int_a^x \frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{2y}} dx$ 心中犯寒 泛函分析	谁过微积分，谁便考你一考，谁勒展开的拉格朗日余项是怎么写的？ 谁心想，微积分作业都做不出来的人，也配考我么，便把反余项余项和积分余项也写了出来 文学创作	如果有来生 我还选晓峰 唯心主义	 擦头 $o(x)$ 垃圾投掷

课程特色

本人的数学&物理作业可能含有以下内容：

$A \Leftarrow B$ 由果及因	 循环论证	$\frac{\sin x}{n} = 6$ 文字游戏	$\frac{\sin 0}{0} = 1$ 偷换概念
$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ 二级结论	 目测可知	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \sin x$ 洛就完了	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} x_1 a + x_2 c = 1 \\ x_1 b + x_2 d = 0 \end{cases}$ $\dots \Rightarrow x_1 = \dots, x_2 = \dots$ 脱裤放屁
$\sin x > 1$ 装疯卖傻	 强行推广	$e^x > \ln x$ 过度放缩	$\langle \psi \hat{G} \psi \rangle = \langle \psi \hat{G} \psi \rangle^*$ 虚张声势

信不信由你

目录

1 关于平均的极限、Stolz 及其应用、指数函数	1
1.1 课程介绍	1
1.1.1 自我介绍	1
1.1.2 怎样学好微积分	2
1.1.3 工具推荐	3
1.2 知识点复习	3
1.2.1 *数、运算与数的扩张	3
1.2.2 确界	5
1.2.3 函数的连续性	5
1.2.4 函数在一点处的极限	6
1.2.5 单侧极限与间断, 单调函数的极限与连续性	8
1.2.6 无穷远、无穷小与无穷大, 数列的极限	9
1.2.7 大 O 与小 o , 函数的主项, 阶的比较	10
1.3 习题课内容	11
1.3.1 自然数的性质	11
1.3.2 不等式与基本逻辑	14
1.3.3 函数极限	19
1.3.4 数列极限	20
1.3.5 与平均值有关的极限	22
1.3.6 Stolz 及其应用	25
1.4 雨课堂作业	35

1.4.1	确界, 连续函数与函数极限	35
1.5	补充习题	46
1.5.1	确界	46
1.5.2	关于乘方、开方、幂指对函数	48
1.5.3	连续与函数在一点处的极限	52
1.5.4	函数在无穷远处的极限、数列极限	54
1.5.5	单调性与极限	59
1.5.6	无穷大量与无穷小量	68
1.5.7	极限的综合练习	76
1.6	讲义习题	80
1.6.1	自然数集与数学归纳法	80
1.6.2	实数集	81
1.6.3	函数的连续性	82
1.6.4	函数在一点处的极限	85
1.6.5	单侧极限与间断, 单调函数的极限与连续性	89
1.6.6	无穷远、无穷小与无穷大, 数列的极限	95
1.6.7	大 O 与小 o , 函数的主项, 阶的比较	100
1.7	教材习题	101
2	极限与实数的重要性质	105
2.1	知识点复习	105
2.1.1	实数的连续性, 迭代与不动点	105
2.1.2	连续函数的介值性质, 反函数的连续性	106
2.1.3	有界闭集上的连续函数	106
2.1.4	函数的一致连续性	107
2.2	习题课内容	107
2.2.1	Cauchy 数列、子列、Heine 归结定理	107
2.2.2	函数的连续性	110
2.3	雨课堂作业	115

2.3.1	函数极限 (小 o)	115
2.4	补充习题	119
2.4.1	有界闭区间套	119
2.4.2	Cauchy 准则	120
2.5	讲义习题	126
2.5.1	实数的连续性	126
2.5.2	应用: 迭代与不动点	127
2.5.3	连续函数的介值性质, 反函数的连续性	128
2.5.4	有界闭集上的连续函数	129
2.5.5	函数的一致连续性	130
2.6	教材习题	131
3	导数与高阶导数	135
3.1	知识点复习	135
3.1.1	导数与微分的概念, 函数的局部线性近似	135
3.1.2	导数与微分的运算法则	136
3.1.3	高阶导数	137
3.1.4	导数与微分的应用	139
3.2	雨课堂作业	140
3.2.1	函数连续性	140
3.2.2	导数	145
3.2.3	高阶导数	149
3.3	补充习题	152
3.3.1	导数与微分	152
3.3.2	高阶导数	157
3.4	讲义习题	161
3.4.1	导数与微分的概念, 函数的局部线性近似	161
3.4.2	导数与微分的运算法则	161
3.4.3	高阶导数	162

3.4.4	应用：平面曲线的切线、法线和曲率	165
3.5	教材习题	166
4	用导数研究函数	171
4.1	知识点复习	171
4.1.1	微分中值定理	171
4.1.2	函数的单调性与极值	172
4.1.3	L'Hôpital 法则	174
4.1.4	Taylor 公式	175
4.2	雨课堂作业	177
4.3	补充习题	183
4.3.1	基本定理	183
4.3.2	不定型极限	186
4.3.3	Taylor 展开式 (一)	188
4.3.4	积分因子、微分方程与辅助函数	193
4.4	讲义习题	195
4.4.1	微分中值定理	195
4.4.2	函数的单调性与极值	197
4.5	教材习题	200
5	泰勒公式应用、函数凹凸性、曲线的渐近线	207
5.1	知识点复习	207
5.1.1	函数的凹凸性	207
5.2	雨课堂作业	208
5.3	补充习题	217
5.3.1	微分中值定理	217
5.3.2	Taylor 展开式 (二)	221
5.3.3	函数的凹凸性	223
5.3.4	曲线的弯曲性质与渐近线	225
5.4	期中讲评	227

6 期中考试评讲	239
6.1 2025 秋《微积分 A(1)》期中考试	239
6.2 2025 秋《高等微积分 (1)》期中考试	244
7 不定积分计算	255
7.1 知识点复习	255
7.1.1 原函数与不定积分	255
7.1.2 不定积分的运算性质	255
7.1.3 有理函数的不定积分以及可转化为有理函数的不定积分	256
7.2 补充习题	257
7.2.1 有理函数的不定积分	257
7.2.2 三角函数的不定积分	260
7.2.3 无理式的不定积分	263
7.2.4 换元法和分部积分	267
7.2.5 杂题	270
7.3 讲义习题	271
7.3.1 不定积分的运算性质	271
7.3.2 有理函数的不定积分以及可转化为有理函数的不定积分	273
8 定积分的性质与计算	277
8.1 知识点复习	277
8.1.1 定积分的概念	277
8.1.2 定积分的性质	279
8.1.3 微积分基本定理与 Newton-Leibniz 公式	280
8.1.4 积分计算	281
8.1.5 *一元定积分的数值计算	281
8.2 雨课堂作业	284
8.3 补充习题	291
8.3.1 函数的可积性	291
8.3.2 定积分的近似计算	292

8.3.3	定积分计算	296
8.3.4	有关定积分的证明题	298
8.4	讲义习题	303
8.4.1	定积分的概念	303
8.4.2	积分计算	305
9	定积分的应用	309
9.1	知识点复习	309
9.1.1	平面区域的面积	309
9.1.2	曲线的弧长	310
9.1.3	曲线的曲率	310
9.1.4	空间曲线的挠率	311
9.1.5	旋转体与旋转面	312
9.1.6	质心与加权平均	312
9.2	雨课堂作业	313
9.3	补充习题	321
9.4	讲义习题	324
9.4.1	定积分几何应用与物理应用	324
10	广义积分	329
10.1	知识点复习	329
10.1.1	广义积分的概念	329
10.1.2	广义积分的收敛性	330
10.1.3	广义积分的计算	332
10.2	雨课堂作业	332
10.3	补充习题	340
10.3.1	广义积分的概念	340
10.3.2	广义积分的计算	342
10.3.3	广义积分的收敛性	345
10.3.4	杂题	350

11 常微分方程	357
11.1 知识点复习	357
11.1.1 微分方程的基本概念	357
11.1.2 线性微分方程解的结构	357
11.1.3 分离变量法	358
11.1.4 恰当方程与平面向量场的正交曲线族	359
11.1.5 一阶线性微分方程	359
11.1.6 可线性化的一阶非线性微分方程	360
11.1.7 高阶线性方程和线性微分方程组	360
11.1.8 一阶微分方程和斜率场	361
11.1.9 利用数值方法验证微分方程的解	362
11.2 雨课堂作业	363
11.3 补充习题	373
11.3.1 一阶微分方程	373
11.3.2 一阶线性方程	377
11.3.3 有关一阶微分方程的证明题	379
12 高阶微分方程	389
12.1 知识点复习	389
12.1.1 可降阶的高阶方程	389
12.1.2 降维	390
12.1.3 高阶线性微分方程	390
12.1.4 二阶线性微分方程	392
12.2 *扩展阅读: 齐次化原理	393
12.2.1 线性算子的叠加原理	393
12.2.2 非齐次项的叠加原理	394
12.2.3 瞬时冲击与 Green 函数	394
12.2.4 基本解方法: 求解 Green 函数	395
12.2.5 齐次化原理与常数变易法	397

12.3 补充习题	397
12.3.1 可降阶的高阶方程	397
12.3.2 高阶线性微分方程	400
12.3.3 有关高阶微分方程的证明题	402
12.4 讲义习题	404
12.4.1 线性微分方程	404
12.4.2 常系数线性微分方程 (组)	407

注 标注 * 的章节为拓展知识, 不作为考试范围。

第 1 次习题课 关于平均的极限、Stolz 及其应用、指数函数

2023 年 10 月 9 日, 2023 年 10 月 16 日, 2023 年 10 月 23 日, 2023 年 10 月 30 日; 2024 年 9 月 26 日, 2024 年 10 月 10 日, 2024 年 10 月 17 日; 2025 年 10 月 15 日。本节对应微积分 A(1) 第 1、2、3 (前半)、4 次习题课的内容。

1.1 课程介绍

1.1.1 自我介绍

夏子睿, 来自安徽省巢湖市, 清华大学工程物理系零字班本科生, 清华大学安全科学学院 2024 级博士研究生。

我的邮箱是 `xzr24[AT]mails[DOT]tsinghua[DOT]edu[DOT]cn`, 大家也可以在群里加我微信。欢迎大家就课程内容与我交流, 我们共同进步。然而, 我毕竟不是数学系的学生, 可能无法完全解答大家的奇思妙想, 在此先向大家道歉。

本文为 2025~2026 学年秋季学期高等微积分 (1) 的习题课笔记, 同时继承 2023~2024、2024~2025 学年秋季学期微积分 A(1) 的习题课笔记, 授课教师为王晓峰老师。本笔记会同步更新在我的个人网站上, 欢迎点击以下链接¹访问; 也欢迎大家与我交流经验、看法, 督促我完成助教的工作。

微积分 A 使用的教材为《高等微积分教程 (上): 一元函数微积分与常微分方程》(刘智新、闫浩、章纪民著, 简称“刘/闫/章”), 高等微积分使用的教材为《数学分析教程 (上册)》(常庚哲、史济怀著, 简称“蓝皮”), 此外还有王晓峰老师的自编讲义《一元微积分》(简称“讲义”)。

¹<https://www.xiazr20.top/xiazr20/advanced-calculus-i/main.html>。



图 1.1.1: 行胜于言

1.1.2 怎样学好微积分

这是一个很难回答的问题，也是一个个性化程度很高的问题，正如《高等微积分教程》（刘智新、闫浩、章纪民著）中的前言所述“……学好微积分是不可能的”²。作为大家的助教，我想给出一些我作为过来人的建议，希望能对大家有些帮助。

在提问之前，我们需要给问题下一个良好的定义：什么是“学好”？是在考试中取得高分，还是能在以后的学习、工作中熟练运用微积分的知识，亦或是在微积分的基础上进一步学习更高级的数学课程？不同的目标会给出不同的答案。我自身是以第二个为基础、向第三步迈进的态度学习微积分的，这为我以后学习其他数学工具打下了坚实的基础；我的建议也将以此为基础。

首先，**重视课堂**。我深刻理解大家赶早八的痛苦，但是一节课的 45 分钟尤为宝贵。老师的引导能节省很多课后时间。在充分利用课堂之后，对于课堂上不能充分理解的内容，可以课后完善。我当时上微积分 A(2) 时，把王老师的板书整理成了课堂笔记，大家可以点击以下链接³查看。

其次，**不断练习**。数学大厦不是虚无缥缈的空中楼阁，需要不断的练习来浇筑。不论是作业、习题课还是考试，练习是巩固概念、将所学融会贯通的最好方式。不知经过了半年的学习，大家能否一口答出一元微积分中极限的定义？如无充分的练习，即便是这样最简单的概念也如同海市蜃楼。

再者，**时常探索**。好奇心是学习数学的动力。在学习微积分的过程中，我们会遇到很多有趣的问题，有些问题甚至是数学史上的经典。尝试解决这些问题的过程能让我们对微积分有更深入的理解，也能为以后的科研打下基础。大家可以时常记录下自己的想法，并选择一两个深入下去，相信你会有所收获。

最后，**适时放手**。学习是一个螺旋上升的过程，有时并不必强求“彻底”地理解。在学习了后面的概念后，

²原文为：任何教材都只是知识的载体，缺少了学生的毅力和教师的耐心，学好微积分是不可能的。

³<https://www.xiazr20.top/xiazr20/calculus-ii-archived/main.html>。

有时停下脚步回头看看，或许会有不一样的收获。有段子说“实变函数学十遍”，虽然我本人并没能亲身体会，但其中的道理在我的学习生涯中得到了充分验证。希望大家都能如先贤所说，“苟日新，日日新，又日新”。

1.1.3 工具推荐

工欲善其事，必先利其器。好的工具可以帮助我们更好地理解抽象的概念。在此我向大家推荐几个实用的工具。

- (1) Wolfram Mathematica⁴。我愿称之为“符号计算的神”。它可以求解涉及代数、极限、求导、积分、解代数/常/微分/数值微分方程、矩阵运算、绘图等的各类数学问题，尤其见长于符号计算。大家可以参考清华信息化的推送⁵进行安装。以下⁶展示一些它的基本功能，大家也可以关注清华信息化举办的讲座⁷。
- (2) Wolfram Alpha⁸。它是一个免费的数学搜索引擎，支持 Mathematica 的小部分功能，且支持移动端搜索。
- (3) GeoGebra⁹。它是一个免费的数学软件，可以用于绘制函数图像、几何图形、数据图表等。它的界面简洁，功能强大，且支持在线、电脑（Windows、Mac、Linux）、手机（Android、iOS）多端同步。

1.2 知识点复习

1.2.1 *数、运算与数的扩张

数的扩张过程可以用图 1.2.1 来表示。

首先，我们通过数学归纳法原理和后继的概念给出了自然数的定义，同时递归定义了加法和乘法。随后，我们利用加法逆元的概念定义了减法和整数，再利用乘法逆元的概念定义了除法和有理数。至此，我们已构建了一个域，即有理数域，它对四则运算封闭。

我们在有理数域中定义了序，并证明了它的三歧性（定理 1.3.5 和推论 1.3.7），从而给出序域的概念。我们在序域中可以定义绝对值，并给出距离的定义。至此，我们有了度量的手段，为微积分的基本概念——极限作铺垫。

然而，在微积分研究中，仅有有理数域还远远不够。除了老师在课上举的例子以外，我更喜欢下面这种引入方式。在后续的课程中，我们会接触到数列极限的概念，并提出 Cauchy 收敛准则。这可以算得上微积分中最基本的概念，即：

⁴<https://www.wolfram.com/mathematica/>。

⁵<https://mp.weixin.qq.com/s/2AH5Lhzj3NFZsj10bngymQ>。

⁶[./figure/00-mma.pdf](#)。

⁷<https://its.tsinghua.edu.cn/content.jsp?urltype=news.NewsContentUrl&wbtreeid=1004&wbnewsid=3617>。

⁸<https://www.wolframalpha.com/>。

⁹<https://www.geogebra.org/>。

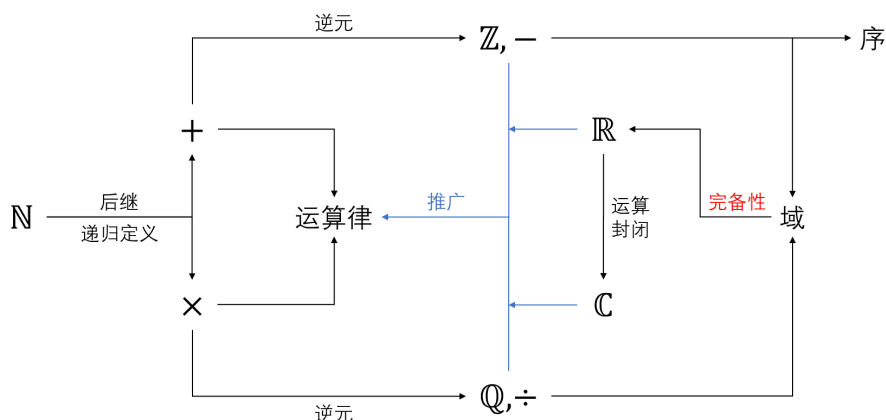


图 1.2.1: 数的扩张过程

定理 1.2.1

数列 $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ 收敛当且仅当它是一个 **Cauchy** 点列，即对于任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $N \in \mathbb{N}$ ，使得对任意 $m, n > N$ ， $|x_n - x_m| < \varepsilon$ 。

Cauchy 收敛准则是判断数列收敛的好方法，因为它只需要研究数列本身的变化趋势，无需预先“开上帝视角”知道数列的极限值。然而，Cauchy 收敛准则成立的条件是**完备性**，即任何 Cauchy 点列都能收敛到原空间。这对空间以及空间的度量提出了要求，你能很轻松地在有理数域中构造出这样的数列来：

例 1.2.2

数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ，其中 x_n 是 $\sqrt{2}$ 的 n 位十进制近似。显然， $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 是一个 Cauchy 点列，但它在有理数域中没有极限。^a

^a此处仅仅是给出一个例子说明有理数域不是完备的，读者不必纠结 $\sqrt{2}$ 的定义问题。

所以仅仅有有理数域是不够的，我们必须扩张数域。一种扩张的方法就是利用**确界**¹⁰，定义**实数**为有理数集合的上确界，并给出了 \mathbb{R} 中的**确界公理**（定理 1.4.14），进而说明它的完备性。这一章最重要的结论便是：**实数集 \mathbb{R} 是唯一一个具有确界性质的序域**。

复数最初是在求解一元三次方程的过程中提出的¹¹，不是本课程的重点。

最后，我们在提出自然数时，就提出了基本的**运算律**，即交换律、结合律和分配律。我们在扩张数的同时，还在不断**推广**四则运算的定义和运算律的适用范围。推广是引入新数学概念的常见思路，读者可在学习中不断体会这一点。

¹⁰也可以定义实数为 \mathbb{Q} 中 Cauchy 点列的极限，感兴趣的读者可自行查阅资料。

¹¹你可能会很惊讶，不应该是在求解一元二次方程的过程中提出来的吗？其实不然。自 Cardano 提出（或者说剽窃 Tartaglia 得到）一元三次方程的求根公式时，人们发现有些显然有三个实根的方程代入求根公式中竟只能得到一个实根，必须假定负数也可以开平方才能求出另外两个。相比之下，二次方程中 $\Delta < 0$ 造成的无实根问题真的算是“无伤大雅”。

读者可以按以上思路厘清这一章的逻辑，并复习以下知识点：

- (1) 自然数集、数学归纳法原理、后继、加法、乘法、结合律、交换律、分配律。
- (2) 整数集、减法、加法单位元、加法逆元。
- (3) 有理数集、除法、乘法单位元、乘法逆元、序、距离、域。
- (4) 实数、实数的序、阿基米德性质。

1.2.2 确界

重要概念回顾 有（上、下）界、上（下）界、最大（小）值、上（下）确界。

重要定理回顾 **确界公理**： \mathbb{R} 中任何非空有上界的集合都有上确界。

注

- (1) 确界公理的一个重要应用是（非空有上界的）集合的上界集合一定有最小值。
- (2) 确界有多种等价表述，以集合 A 的上确界 a 为例，如：
 - $a = \min\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ is the upper bound of } A\}$ 。
 - a 是上界；且 $\forall \varepsilon > 0$ ， $a - \varepsilon$ 都不是 A 的上界，即 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists x \in A$ ，使得 $x > a - \varepsilon$ 。
 - $\forall x > a$ ， x 都是 A 的上界；且 $\forall x < a$ ， x 都不是 A 的上界。

1.2.3 函数的连续性

重要概念回顾

- (1) **连续**：设 $I \subseteq \mathbb{R}$ ，称函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $a \in I$ 处连续，若 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists \delta > 0$ ，使得 $\forall x \in I$ ， $|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ 。
- (2) **连续函数**：称 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数，若 f 在 I 的每一点处连续。

重要定理回顾

- (1) **连续函数的复合**：设函数 f 在 a 处连续， g 在 $b = f(a)$ 处连续，则 $g \circ f$ 在 a 处连续。
- (2) **连续函数的四则运算**：设函数 f 和 g 都在 a 处连续，则 $f \pm g$ 、 $f \cdot g$ 、 f/g ($g(a) \neq 0$) 都在 a 处连续。

应用

- (1) 绝对值函数 $|x|$ 在 \mathbb{R} 上连续。
- (2) 基本初等函数（常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）在其定义域内连续。它们的有限次四则运算和复合运算结果仍然连续。

1.2.4 函数在一点处的极限

重要概念回顾

- (1) 邻域、去心邻域、聚点、孤立点。
- (2) **极限**: 设 $a \in \mathbb{R}$ 是集合 I 的一个聚点, 称 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 若 $\exists A \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall x \in I \cap \overset{\circ}{U}(a, \delta), |f(x) - A| < \varepsilon$.

重要定理回顾

- (1) **极限唯一性**: 若当 x 趋于 a 时函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 存在极限, 则极限唯一。
- (2) **极限与连续的关系**: 设 a 是 I 的聚点, 则
 - 若在 a 的一个去心邻域中 $f(x) = g(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ 。
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 的充分必要条件是如下定义的函数 F 在 a 处连续:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in I \setminus \{a\}, \\ A, & x = a. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

- f 在 a 处连续当且仅当 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 。
- (3) **极限的四则运算**: 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, 则
 - $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)]$ 存在, 且等于 $A \pm B$ 。
 - $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$ 存在, 且等于 $A \cdot B$ 。
 - 若 $B \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, 且等于 $\frac{A}{B}$ 。
 - (4) **复合函数的极限**: 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.
 - 若 g 在点 b 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x))$ 存在, 且等于 $g(b)$ 。
 - 若 g 在点 b 处无定义, 且 $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x))$ 存在, 且等于 A 。

- (5) **夹挤定理**: 设函数 u, v, f 都在 I 上定义, a 是 I 的聚点。若在 a 的一个去心邻域中总有 $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在, 且等于 A 。
- (6) **保序性和有界性**: 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, 则
- 若 $A < B$, 则在 a 的某个去心邻域中总成立 $f(x) < g(x)$ 。
 - f 在 a 的某个去心邻域中有界。
 - 若在 a 的任何去心邻域中总存在 x 使得 $f(x) \leq g(x)$, 则 $A \leq B$ 。

应用

(1) $\lim_{x \rightarrow a} x \sin \frac{1}{x} = 0$ 。

(2) 定义 Riemann 函数为

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & x = \frac{q}{p}, p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{Z}, \gcd(p, q) = 1, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

则 $\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} R(x) = 0$ 。

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x} = -1$ 。

(4) 设 $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ 。

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2/2} = 1$ 。

(6) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在, 则 f 在 a 的某个去心邻域中有界。

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不存在。

注

- (1) 极限不关心函数在该点的取值, 只关心函数在该点附近 (即去心邻域) 的取值。
- (2) 在有关极限的定理中, 我们首先关心的始终是**极限是否存在**, 其次是极限的值。
- (3) 在复合函数的极限中, 若 g 在点 b 处有定义且存在极限 A , 但 $g(b) \neq A$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = A$ 可能不成立。
- (4) 由函数保序性推出极限保序性时, 需要特别注意: 只能保证**不严格不等号**成立, 即便函数是严格保序的。
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \sin \frac{1}{x})}{x \sin \frac{1}{x}}$ 是否存在? 这取决于极限的定义。在教材 (刘/闰/章) 中, 极限要求函数在去心邻域上有定义, 而 $x = 0$ 的任意去心邻域内都包含使分母为零的点, 此时该极限不存在。而在本堂课中, 极限是对聚点定义的, 而 $x = 0$ 的任意去心邻域内都包含使分母不为零的点, 因此该极限存在且等于 1。

1.2.5 单侧极限与间断, 单调函数的极限与连续性

重要概念回顾

- (1) **单侧极限**: 设 $a \in \mathbb{R}$ 是集合 I 的一个聚点, 称右极限 $f(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall x \in I \cap (a, a + \delta), |f(x) - A| < \varepsilon$.
- (2) **单侧连续**: 称 f 在 a 处右连续, 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
- (3) **间断点**: 设 $a \in \mathbb{R}$ 是集合 I 的一个聚点, 称 $a \in \mathbb{R}$ 是函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 的间断点, 若 f 在 a 处无定义或不连续。间断点可分为:
- **第一类间断点**: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 都存在, 又可细分为:
 - **可去间断点**: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, 但 f 在 a 处无定义或 $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 。
 - **跳跃间断点**: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 。
 - **第二类间断点**: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 至少有一个不存在。

重要定理回顾

- (1) 对单侧极限, 上述(双侧)极限所有的性质(唯一性、四则运算、复合函数、夹挤定理、保序性和有界性)都成立。
- (2) **单调有界蕴涵单侧极限存在**: 设 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 单调不减。
 - 若 f 在 (a, b) 内有上界, 则 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 且等于 $\sup_{x \in (a, b)} f(x)$ 。
 - 若 f 在 (a, b) 内有下界, 则 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在, 且等于 $\inf_{x \in (a, b)} f(x)$ 。
- (3) **单调函数的连续性、反函数的连续性**: 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是单调函数, 则
 - f 连续当且仅当 $f(I)$ 是区间。
 - 若 f 是严格单调的连续函数, 则 $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ 连续。

应用

- (1) 各类间断点的判断。所有有理数点都是 Riemann 函数的可去间断点, 所有实数点都是 Dirichlet 函数的第二类间断点。
- (2) 设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 单调。且 f 在 x_0 左右两侧任意近旁有定义, 则
 - 单侧极限 $f(x_0^-), f(x_0^+)$ 存在, 且 $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$ 。
 - 若 $f(x_0^-) < f(x_0^+)$, 则 f 在 x_0 处跳跃间断。

- 若 $f(x_0^-) = f(x_0^+)$, 则 f 在 x_0 处连续

(3) 乘方、开方、指数、对数、幂函数的连续性。

1.2.6 无穷远、无穷小与无穷大, 数列的极限

重要概念回顾

- (1) $\pm\infty$ 作为聚点。
- (2) **函数在无穷远处的极限:** 设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $+\infty$ 是 I 的聚点 ($\forall N > 0, I \cap [N, +\infty) \neq \emptyset$), 称 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使得 $\forall x, x > N \implies |f(x) - A| < \varepsilon$. $-\infty, \infty$ 类似。
- (3) 无穷小、无穷大、正(负)无穷大。
- (4) 数列作为定义在自然数(正整数集)上的函数, 无穷小数列、无穷大数列、正(负)无穷大数列。
- (5) 邻域、去心邻域、左(右)侧去心邻域、 $\pm\infty$ 的邻域、 ∞ 的邻域。
- (6) 垂直渐近线、斜渐近线、水平渐近线。

重要定理回顾

- (1) **复合函数的极限:** 设 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A, \lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$, 其中 $c, A, B \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ 或为某个实数的某一侧, 则在下述三个条件之一成立时, 都有 $\lim_{x \rightarrow c} g(f(x)) = B$:
 - $A = +\infty, -\infty, \infty$ 。
 - A 是实数或实数的某侧, 且 f 总在 A 的去心邻域中。
 - A 是实数或实数的某侧, 且 g 在 A 处连续。
- (2) **Heine 定理:**
 - 函数 g 在 y_0 处连续当且仅当对 g 的定义域中任意满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_0$ 的数列 $\{y_n\}$, 都有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(y_n) = g(y_0)$ 。
 - $\lim_{y \rightarrow c} g(y) = A$ 当且仅当对满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = c$ 且 $y_n \neq c$ 的任意数列 $\{y_n\}$, 都有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(y_n) = A$ 。
- (3) **子列:** 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$, 则对任意单射 $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, 都有 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{f(k)} = A$ 。特别地, 当 f 是增函数时, 称数列 $\{a_{f(k)}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的子列。
- (4) 对极限为实数或 $+\infty, -\infty$ 的情况, 极限的保序性、单调有界收敛的结论也都成立。

应用

- (1) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ 当且仅当 $\forall M > 0$, 存在 c 的一个去心邻域 V 使得 $\forall x \in V, |f(x)| > M$ 。
- (2) 设 $\alpha > 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$ 。
- (3) 设 $a > 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ 。
- (4) 若当 $x \rightarrow c$ 时, f_1, f_2 都是无穷小, f_3 有界, 则当 $x \rightarrow c$ 时, $f_1 + f_2, f_1 f_3$ 也是无穷小。
- (5) 设 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = (\pm)\infty$ 。
- 若 g 有正下界, 则 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = (\pm)\infty$ 。
 - 若 g 有界, 则 $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = (\pm)\infty$ 。
 - 若 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$, 且 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty$ 。
- (6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 。
- (7) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ 。

注

- (1) 有限多个邻域 (去心邻域) 的交集仍是邻域 (去心邻域)。
- (2) 极限的邻域表述: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$, 即对 A 的任何邻域 W , 存在 c 的去心邻域 V 使得 $f(V) \subseteq W$ 。
- (3) 连续的邻域表述: f 在 x_0 处连续, 即对 $f(x_0)$ 的任何邻域 W , 存在 x_0 的邻域 V 使得 $f(V) \subseteq W$ 。

1.2.7 大 O 与小 o, 函数的主项, 阶的比较

重要概念回顾

- (1) **大 O**: 当 $x \rightarrow a$ 时, 称 $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, 若 $\exists M > 0, \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ 使得 $x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta) \implies |f(x)| \leq M|g(x)|$ 。
- (2) **小 o**: 当 $x \rightarrow a$ 时, 称 $f(x) = o(g(x))$, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ 使得 $x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta) \implies |f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$ 。
- (3) **有界量**: 当 $x \rightarrow a$ 时, 称函数 f 是有界量 (即 $f(x) = \mathcal{O}(1)$), 若 $\exists M > 0, \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ 使得 $x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta) \implies |f(x)| \leq M$ 。
- (4) 不比~更低阶的无穷小、更高阶的无穷小, 不比~更低阶的无穷大、更高阶的无穷大。
- (5) **同阶**: 称 f 与 g 同阶, 若 $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ 且 $g(x) = \mathcal{O}(f(x))$ 。
- (6) **等价**: 称 f 与 g 等价, 若 $f(x) = g(x) + o(g(x))$ 。

重要定理回顾

(1) 大 O 与小 o 的运算性质:

- $f = O(f)$; 一般 $f \notin o(f)$, 除非在 c 的某个去心邻域中 $f(x) = 0$ 。
- $f = o(g) \implies f = O(g)$, 即 $o(g) \subseteq O(g)$ 。一般 $o(g) \neq O(g)$, 除非 $g(x) = 0$ 。
- $f = O(p) \wedge g = O(q) \implies fg = O(pq)$ 。
- $f = O(p) \wedge g = o(q) \implies fg = o(pq)$ 。
- $o(h)$ 和 $O(h)$ 都是线性空间, 即 $f = O(h) \wedge g = O(h) \implies \lambda f + \mu g = O(h)$, 对 o 成立类似的结论, 其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 。

(2) 当 $x \rightarrow a$ 时, 若 $f(x) + o(f(x)) = G(x) + o(g(x))$, $G(x) = O(g(x))$, 则 $f(x) = G(x) + o(g(x))$ 。

(3) 推论: 当 $x \rightarrow a$ 时, 若 $f(x) = g(x) + o(g(x))$, 则 $g(x) = f(x) + o(f(x))$ 。

应用

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x = x + o(x)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\tan x = x + o(x)$ 。

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x = 1 + x + o(x)$, $\ln(1+x) = x + o(x)$, $(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$ 。

(3) 设 $0 < \alpha < \beta$ 。当 $x \rightarrow 0^+$ 时, x^β 是比 x^α 更高阶的无穷小; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, x^β 是比 x^α 更高阶的无穷大。

注

(1) 算法理论 (如数据结构) 中还常用 Ω, Θ 符号。

(2) 有些教材用 “ $f(x) \sim g(x)$ ” 来表示 f 与 g 等价, 并提出了无穷小等价替换的做法。我们不建议使用这种方法, 请大家在计算过程中始终保留 o 记号。

1.3 习题课内容

1.3.1 自然数的性质

例 1.3.1 (习题 1.1.3)

自然数消去律。设 $m, n, k \in \mathbb{N}$, 证明

(1) 加法消去律: 若 $m + k = n + k$, 则 $m = n$ 。

(2) 乘法消去律: 若 $k \neq 0$ 且 $m \cdot k = n \cdot k$, 则 $m = n$ 。

证明 (1) 加法消去律: 对 k 进行数学归纳。

1. 当 $k = 0$ 时, $m + 0 = n + 0 \iff m = n$, 命题成立。

2. 设命题对 $k = k'$ 成立, 则当 $k = k' + 1$ 时,

$$\begin{aligned} m + (k' + 1) = n + (k' + 1) &\iff S(m + k') = S(n + k') \\ &\implies S(m) = S(n) \implies m = n \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

上述证明过程中红色蕴涵式成立是因为 S 是单射。

综上, 由数学归纳法, 命题对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 成立。

(2) 首先证明一个引理: 设 $m, n \in \mathbb{N}$, 则 $m \cdot n = 0 \implies m = 0 \vee n = 0$ 。

分两种情况证明即可:

1. 若 $n = 0$, 则命题显然成立。

2. 若 $n \neq 0$, 则 $\exists n' \in \mathbb{N}$ 使得 $n = S(n')$ 。设 $m \neq 0$, 则 $\exists m' \in \mathbb{N}$ 使得 $m = S(m')$, 因此

$$m \cdot n = (m' + 1) \cdot (n' + 1) = S(m' \cdot n' + m' + n') \quad (1.3.2)$$

由于 $S(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$, 故 $m \cdot n \in \mathbb{N}^*$, 与题设 $m \cdot n = 0$ 矛盾。因此 $m = 0$ 。

综上, 引理成立。

乘法消去律: 对 n 进行数学归纳。 设

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*, m \cdot k = n \cdot k \implies m = n\} \quad (1.3.3)$$

1. $0 \in A$, 因为 $\forall m \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*$

$$m \cdot k = 0 \cdot k \implies m = 0 \vee k = 0 \implies m = 0 \quad (1.3.4)$$

2. 设 $n \in A$, 则 $\forall m \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*$, 设 $m = S(m')$,

$$\begin{aligned} m \cdot k = (n + 1) \cdot k &\iff m' \cdot k + k = n \cdot k + k \implies m' \cdot k = n \cdot k \implies m' = n \\ &\iff S(m') = S(n) \iff m = n + 1 \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

因此 $n + 1 \in A$ 。上述证明过程中红色蕴涵式成立是因为加法消去律。

综上, 由数学归纳法, $A = \mathbb{N}$, 命题对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立。 \square

例 1.3.2 (习题 1.1.4)

自然数的序。用自然数集和自然数加法的定义证明：

- (1) $\forall m, n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}$ 使得 $m = n + k$ 或者 $n = m + k$ 。对前者，我们记 $n \leq m$ 。
- (2) 对 \mathbb{N} 的任意非空子集 $A, \exists m \in A$ 使得 $\forall n \in A$ 都有 $m \leq n$ ，即 \mathbb{N} 的任意非空子集都有最小值。

证明 我们已经证明：自然数加法的交换律、结合律以及 $n + 0 = 0 + n = n$ 。

(1) 对 n 进行数学归纳。设

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, m = n + k \vee n = m + k\} \quad (1.3.6)$$

1. $0 \in A$ ，因为 $\forall m \in \mathbb{N}$ ，取 $k = m$ ，则 $m = 0 + k$ 。
2. 设 $n \in A$ ，则 $\forall m \in \mathbb{N}$ ，存在 $k' \in \mathbb{N}$ 使得 $m = n + k'$ 或 $n = m + k'$ 。分两种情况讨论：
- 若 $m = n + k'$ 成立，设 $k' \neq 0$ （否则归入 $n = m + 0$ 成立的情形）、 $S(k) = k'$ ，则

$$m = n + k' = n + S(k) = S(n + k) = S(n) + k = (n + 1) + k \quad (1.3.7)$$

- 若 $n = m + k'$ 成立，则

$$n + 1 = S(n) = S(m + k) = m + S(k) = m + (k + 1) \quad (1.3.8)$$

两种情况都说明 $n + 1 \in A$ 。

综上，由数学归纳法， $A = \mathbb{N}$ ，命题对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立。

(2) 对 $\{0, 1, \dots, n\}$ 进行数学归纳。设

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{任意非空子集 } A \subseteq \{0, 1, \dots, n\} \text{ 都有最小值}\} \quad (1.3.9)$$

1. $0 \in B$ ，因为 $\{0\}$ 的唯一非空子集为 $\{0\}$ ， $\exists m = 0 \in \{0\}$ 使得 $\forall x \in \{0\}$ 都有 $0 \leq x$ 。
2. 设 $n \in B$ ，则任意非空子集 $A \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ 都有最小值。设 $A \subseteq \{0, 1, \dots, n + 1\}$ ，分两种情况讨论：
- 当 $n + 1 \notin A$ 时，有 $A \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ 。由归纳假设， $\exists m \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 都有 $m \leq x$ 。
 - 当 $n + 1 \in A$ 时，即 $\{n + 1\} \subseteq A$ 。
 - 若 $\{n + 1\} = A$ ，则 $\exists m = n + 1 \in \{n + 1\}$ 使得 $\forall x \in \{n + 1\}$ 都有 $n + 1 \leq x$ 。
 - 若 $\{n + 1\} \subsetneq A$ ，则 $A \setminus \{n + 1\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ 。由归纳假设， $\exists m' \in A$ 使得 $\forall x \in A \setminus \{n + 1\}$ 都有 $m' \leq x$ 。归纳可证 $\forall x \in \{0, 1, \dots, n\}$ 都有 $x \leq n + 1$ ，故 $m' \leq n + 1$ ，因此 $\forall x \in A$ 都有 $m' \leq x$ 。

□

例 1.3.3 (习题 1.1.6)

自然数的带余除法。设 $m, n \in \mathbb{N}$ 、 $n \neq 0$ ，证明 $\exists k, r \in \mathbb{N}$ 使得 $m = nk + r$ 且 $r < n$ 。这里 $a < b$ 表示 $a \leq b$ 且 $a \neq b$ 。

证明 对 m 进行数学归纳。设

$$A = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists k, r \in \mathbb{N}, m = nk + r \wedge r < n\} \quad (1.3.10)$$

1. $0 \in A$ ，因为 $0 = 0 \cdot n + 0$ 且 $0 < n$ 满足题设。

2. 设 $m \in A$ ，则 $\exists k, r \in \mathbb{N}$ 使得 $m = nk + r$ 且 $r < n$ 。分两种情况讨论：

- 若 $n = S(r)$ ，则

$$m + 1 = nk + (r + 1) = nk + n = n(k + 1) + 0 \quad (1.3.11)$$

- 若 $n \neq S(r)$ ，则

$$m + 1 = nk + (r + 1) = nk + S(r) \quad (1.3.12)$$

由于 $r < n$ ，故 $\exists k' \in \mathbb{N}$ 使得 $n = r + k'$ ，并且 $k' \neq 0$ （否则 $r = n$ ）。令 $k'' = S(k')$ ，则有

$$S(r) + k'' = r + S(k') = r + k' = n \quad (1.3.13)$$

故 $S(r) \leq n$ 。再由于 $S(r) \neq n$ ，故 $S(r) < n$ 。

两种情况都说明 $m + 1 \in A$ 。

综上，由数学归纳法， $A = \mathbb{N}$ ，命题对于任意 $m \in \mathbb{N}$ 成立。 \square

1.3.2 不等式与基本逻辑**例 1.3.4 (习题 1.3.3 改编)**

(1) 设 \mathbb{F} 为任一序域，证明： $\forall x \in \mathbb{F}$ ， $x^2 \geq 0$ ，并且 $x^2 = 0 \iff x = 0$ 。

(2) 证明：复数集 \mathbb{C} 不是序域。

证明 (1) $\forall x \in \mathbb{F}$,

1. 若 $x = 0$ ，则 $x^2 = 0$ ，命题成立。

2. 若 $x \in \mathbb{F}^+$ ，则 $x^2 = x \cdot x \in \mathbb{F}^+$ ，命题成立。

3. 若 $-x \in \mathbb{F}^+$, 则

$$x^2 = (x + (-x)) \cdot (-x) + x \cdot x = (-x) \cdot (-x) + x \cdot (x + (-x)) = (-x) \cdot (-x) \in \mathbb{F}^+ \quad (1.3.14)$$

命题成立。

综上, $\forall x \in \mathbb{F}, x^2 \geq 0$, 并且 $x^2 = 0 \iff x = 0$ 。

(2) 反证法。假设 \mathbb{C} 是序域, 则 $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 \geq 0$ 。但对于 $z = i$, 有 $z^2 = -1 < 0$, 与假设矛盾。因此 \mathbb{C} 不是序域。 \square

在接下来的微积分学习中, 我们常常借助各种不等式分析函数的性质或变化趋势。我们回顾一些常用的不等式。

定理 1.3.5 (Cauchy-Schwarz 不等式)

对任意实数 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right). \quad (1.3.15)$$

等号成立当且仅当存在实数 λ , 使得对任意 $i = 1, \dots, n$, $a_i = \lambda b_i$ 。

证明 Cauchy-Schwarz 不等式是内积空间的天然结构。对于定义了内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$ 的线性空间 (\mathbb{F}, V) , 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, 则有

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \quad (1.3.16)$$

证明过程只需要考虑关于 λ 的二次函数

$$f(\lambda) = \langle \mathbf{u} - \lambda \mathbf{v}, \mathbf{u} - \lambda \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2\lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0 \quad (1.3.17)$$

的判别式 $\Delta \leq 0$ 即可。

对于本题需要证明的不等式, 只需令 $V = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = (a_1, \dots, a_n)^T$, $\mathbf{v} = (b_1, \dots, b_n)^T$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ 即可。

对于复线性空间, 需要对上述证明稍加修改。 \square

定理 1.3.6 (Bernoulli 不等式)

设 $x_1, \dots, x_n > -1$, 且对任意 $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $x_i x_j \geq 0$, 则有

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.3.18)$$

等号成立当且仅当 x_1, \dots, x_n 中至多有一个非零。

证明 提示: 利用数学归纳法, 即

$$\prod_{i=1}^{n+1} (1+x_i) \geq (1+x_{n+1}) \left(1 + \sum_{i=1}^n x_i\right) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i \quad (1.3.19)$$

□

例 1.3.7

利用 Bernoulli 不等式证明: 对任何正整数 n 和任何正数 a, b , 都有

$$ab^n \leq \left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1} \quad (1.3.20)$$

等号成立当且仅当 $a=b$ 。并利用这个不等式证明对任何正整数 n , 都有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (1.3.21)$$

证明 提示:

$$\left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1} = b^{n+1} \left(1 + \frac{\frac{a}{b}-1}{n+1}\right)^{n+1} \geq b^{n+1} \left(1 + \frac{\frac{a}{b}-1}{n+1} \cdot (n+1)\right) = ab^n \quad (1.3.22)$$

等号成立当且仅当 $\frac{a}{b} = 1$, 即 $a=b$ 。

对于下面的不等式链, 第二个不等号显然; 第一个不等号可取 $a=1, b=1+\frac{1}{n}$; 第三个不等号可取 $a=1, b=1-\frac{1}{n+1}$ 。 □

定理 1.3.8 (AM-GM 不等式)

利用上题中的不等式证明: 对任何正整数 n 和任何非负数 x_1, \dots, x_n , 都有

$$x_1 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n \quad (1.3.23)$$

等号成立当且仅当 $x_1 = \cdots = x_n$ 。

证明 提示: 利用数学归纳法, 记 $A_n = (x_1 + \cdots + x_n)/n$, 则

$$A_{n+1}^{n+1} = \left(\frac{x_{n+1} + nA_n}{n+1}\right)^{n+1} \geq x_{n+1} A_n^n \geq x_1 \cdots x_n x_{n+1} \quad (1.3.24)$$

□

定理 1.3.9 (带权 AM-GM 不等式)

对任何非负数 x_1, \dots, x_n 和任何正整数 p_1, \dots, p_n 都有

$$x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n} \leq \left(\frac{p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + \cdots + p_n} \right)^{p_1 + \cdots + p_n} \quad (1.3.25)$$

证明 提示: 令

$$\begin{aligned} y_1 = \cdots = y_{p_1} &= x_1 \\ y_{p_1+1} = \cdots = y_{p_1+p_2} &= x_2 \\ &\vdots \\ y_{p_1+\cdots+p_{n-1}+1} = \cdots = y_{p_1+\cdots+p_n} &= x_n \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

□

例 1.3.10

已知 $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = 1$, 求 $a^2 + b^2$ 。

令 $x = \sqrt{1-b^2}$ 、 $y = \sqrt{1-a^2}$, 则

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ a^2 + y^2 = 1 \\ b^2 + x^2 = 1 \end{cases} \quad (1.3.27)$$

因此 $a^2 + b^2 + x^2 + y^2 = 2$ 。

如果 $a^2 + b^2 > 1$, 则由对称性知 $x^2 + y^2 > 1$ 。但这与 $a^2 + b^2 + x^2 + y^2 = 2$ 矛盾。

同理由 $a^2 + b^2 < 1$ 也推出矛盾。因此 $a^2 + b^2 = 1$ 。

上述解答对吗?

解 不正确。“对称性”通常指方程或问题在交换某些变量后保持不变。它意味着: 若元组 (a, b, x, y) 是一个解, 则交换变量后得到的元组也仍是解, 即解集在某种置换下不变; 但这并不自动意味着在某一个具体解中被交换的量相等, 除非再加上“唯一性”或“极值/最优性”之类的额外信息。

反例 (说明不能以对称性直接断言各量相等): 方程 $x + y = 3$ 对交换 $x \leftrightarrow y$ 是对称的, 但 $(2, 1)$ 是解且不满足 $x = y$ 。对称性导致相等的典型情形: 当在对称约束下求极值且极值唯一时, 例如在 $x + y = c$ 下最小化 $x^2 + y^2$, 由于对称性与凸性, 最小点必为 $x = y$ 。

参考解答如下: 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$1 = \left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \right)^2 \leq (a^2 + b^2) [(1-a^2) + (1-b^2)] = 2(a^2 + b^2) - (a^2 + b^2)^2 \quad (1.3.28)$$

由此可得

$$(a^2 + b^2 - 1)^2 \leq 0 \implies a^2 + b^2 = 1 \quad (1.3.29)$$

等号成立当且仅当存在 λ 使得

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} = \lambda \quad (1.3.30)$$

□

例 1.3.11

证明：有理数在实数集中是稠密的，即 $\forall a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$ ，开区间 (a, b) 中含有无穷多个有理数。

不妨设 $a > 0$ ，则存在正整数 m, n 使得 $[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}] \subseteq (a, b)$ 。取 $r_k = \frac{2mk+1}{2nk}$ ($k = 1, 2, \dots$)，则 $r_k \in (a, b)$ 是有理数。从而 (a, b) 中含有无穷多个有理数。

上述论证对吗？

解 不正确。上述论证中，“存在正整数 m, n 使得 $[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}] \subseteq (a, b)$ ”实际上利用了有理数在实数集中稠密的性质，因此论证是循环的。

参考解答如下：记 $a_0 := \lfloor a \rfloor < \lfloor b \rfloor =: b_0$ ，采用以下方法构造 $\{a_n\}, \{b_n\}$ ：

- 若 $\frac{a_n+b_n}{2} \leq a$ ，或 $a < \frac{a_n+b_n}{2} < b$ 且 $a_n \leq a$ ，则令 $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ ， $b_{n+1} = b_n$ 。
- 若 $\frac{a_n+b_n}{2} \geq b$ ，或 $a < \frac{a_n+b_n}{2} < b$ 且 $a_n > a$ ，则令 $a_{n+1} = a_n$ ， $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ 。

由此可得 $\{a_n\}$ 单调不减且有上界 b ， $a_n < b$ ； $\{b_n\}$ 单调不增且有下界 a ， $b_n > a$ ； $a_n \leq b_n$ ， $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ 。因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L \in [a, b]$ 。

若 $L = a$ ，由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$ ，取 $\varepsilon \in (0, b - a)$ ， $\exists N > 0$ 使得 $n > N \implies a - \varepsilon < a_n \leq a < b_n < a + \varepsilon$ ，则始终有 $b_{n+1} = b_n$ 。为了使 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$ ，只能有 $b_n = a$ ($\forall n > N$)，与 $b_n > a$ 矛盾，故有 $L \neq a$ 。类似地可证 $L \neq b$ ，因此 $L \in (a, b)$ 。

$\forall \varepsilon = \min\{L - a, b - L\}$ ， $\exists N > 0$ 使得 $n > N \implies a \leq L - \varepsilon < a_n \leq L \leq b_n < L + \varepsilon \leq b$ ，其中 a_n, b_n 均为有理数。由于 $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$ ，这些有理数的取值不可能有限，从而 (a, b) 中含有无穷多个有理数。 □

1.3.3 函数极限

例 1.3.12

不定项选择题：设 f 在集合 $(a-1, a) \cup (a, a+1)$ 上有定义。以下哪些陈述与 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 等价？其中

$$O_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \delta\} \quad (1.3.31)$$

- (A) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in O_\delta(a) \setminus \{a\}$, 都有 $|f(x) - A| \leq \varepsilon$ 。
 (B) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in O_\delta(a) \setminus \{a\}$, 都有 $|f(x) - A| < k\varepsilon$ (k 是常数)。
 (C) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in O_\delta(a) \setminus \{a\}$, 都有 $|f(x) - A| < \varepsilon^2$ 。
 (D) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \delta > 0, \forall x \in O_\delta(a) \setminus \{a\}$, 都有 $|f(x) - A| < \frac{1}{n}$ 。
 (E) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in O_{1/m}(a) \setminus \{a\}$, 都有 $|f(x) - A| < \frac{1}{n}$ 。
 (F) $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in O_{\varepsilon^2}(a) \setminus \{a\}$, 都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。
 (G) $\exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in O_\delta(a) \setminus \{a\}$, 都有 $|f(x) - A| \leq \varepsilon$ 。
 (H) $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0, \forall x \in O_\delta(a) \setminus \{a\}$, 都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

解 ABCDE。F 的条件过强，因为它限制了 $\delta = \varepsilon^2$ ，没有考虑到函数变化更剧烈的情形，如 $x = 0$ 附近的 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 。G 的条件更强，这甚至等价于 $f(x) = A$ 在 $O_\delta(a)$ 内恒成立。H 的条件过弱，因为它允许 ε 随着 δ 的变化而变化，无法保证函数值接近 A 。□

例 1.3.13

不定项选择题：设 f 在区间 $(0, +\infty)$ 上有定义。以下陈述中与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ 的否定等价的是：

- (A) $\exists A \neq 1$, 使得 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$, 使得 $\forall x > M$, 都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。
 (B) $\exists \varepsilon_0 > 0$, 使得 $\forall M > 0, \exists x' > M$, 使得 $|f(x') - 1| \geq \varepsilon_0$ 。
 (C) $\exists \varepsilon_0 > 0$ 以及数列 x_n , 使得 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $x_n > n$ 且 $|f(x_n) - 1| \geq \varepsilon_0$ 。
 (D) $\exists A \neq 1$ 或 $A = \infty$ 以及数列 $x_n > 1$, 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A$ 。

解 BCD。A 等价于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \neq 1$, 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ 的否定不等价。BCD 分别对应极限的三种等价表述的否定：

- $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$, 使得 $\forall x > M$, 都有 $|f(x) - 1| < \varepsilon$ 。

- $\forall \{x_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, 都有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 1$ 。
- $\forall A \neq 1$ 或 $A = \infty$, $\forall \{x_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, 都有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq A$ 。

显然第3条表述由第2条表述引出, 因此我们重点关注第2条等价表述。

充分性: 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 1$, 即 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall N > 0, \exists x > N$ 使得 $|f(x) - 1| \geq \varepsilon_0$ 。令 $N = n$, 从而得到数列 $\{x_n\}$ 且满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq 1$, 与题设矛盾。

必要性: 若 $\exists \{x_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq 1$, 即 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N$ 使得 $|f(x_n) - 1| \geq \varepsilon_0$, 从而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 1$, 与题设矛盾。 \square

例 1.3.14

判断题: 若 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ 不真, 则 f 在 $x = 1$ 的一个去心邻域内有界。

解 \times 。 \square

例 1.3.15

已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = 2$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 $a = 2, b = -8$ 。 \square

1.3.4 数列极限

例 1.3.16

计算极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$, 甲乙两位同学分别给出如下解答:

甲解 因为

$$1 \leq (n!)^{\frac{1}{n^2}} \leq (n^n)^{\frac{1}{n^2}} = \sqrt[n]{n} \quad (1.3.32)$$

而已知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 所以根据夹挤定理, 所求极限值为 1。 \square

乙解 因为

$$1 \leq (n!)^{\frac{1}{n^2}} \leq \sqrt[n]{\sqrt{1} \cdot \sqrt{2} \cdots \sqrt{n}} \quad (1.3.33)$$

因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2} = 1, \quad \cdots, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad (1.3.34)$$

所以对于任意 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时,

$$1 \leq \sqrt[n]{1} < 1 + \varepsilon, \quad 1 \leq \sqrt[n]{2} < 1 + \varepsilon, \quad \dots, \quad 1 \leq \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon \quad (1.3.35)$$

因此

$$1 \leq (n!)^{\frac{1}{n^2}} \leq \sqrt[n]{(1+\varepsilon)^n} = 1 + \varepsilon \quad (1.3.36)$$

所求极限值为 1。 □

以上两位同学的解答是否正确? 为什么?

解 只有甲的解答正确。乙的解答中, “充分大的 n ” 是指 $\exists N$ 使得 $n > N \implies \dots$, 这里的 N 只能依赖于 ε ; 而每个不等式 $\sqrt[k]{k} < 1 + \varepsilon$ 又会产生 n 的下界 N_k , 并且要求最终的 N 大于每个 N_k , 亦即

$$n > N > \max\{N_1, N_2, \dots, N_n\} \quad (1.3.37)$$

由此可见形成了循环依赖, 无法确定合适的 N 。因此乙的解答不正确。 □

例 1.3.17

以下解答的目的是求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k}$ 的值。

解 记原数列为 a_n 、 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}$ 、 $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$, 则

$$b_n = 1 - \frac{1}{2^n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1 \quad (1)$$

$$a_n = 2S_n - b_n \quad (2)$$

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^{k-1}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \quad (3)$$

所以

$$S_n = \frac{1}{2} S_{n-1} + b_n \quad (4)$$

两边取极限得到

$$S = \frac{1}{2} S + 1 \quad (5)$$

从而 $S = 2$ 。(2) 两边取极限得到

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2 \times 2 - 1 = 3 \quad (6)$$

问题: 上述解法是否正确? 如果不正确, 请指出错误之处。 □

解 不正确。式 (5) 的成立需要 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ 存在, 而这正是我们要求的极限, 因此式 (5) 不能成立。也就是说, 我们通过式 (5) 证明了“如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ 存在, 那么 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$ ”, 但这并不能说明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ 确实存在。 □

1.3.5 与平均值有关的极限

例 1.3.18 (习题 2.4.21 改编)

Cauchy 算术平均。设 $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 。

(1) 证明：若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$ ，则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$ 。

(2) 上述命题的逆命题是否成立？若成立，请给出证明；若不成立，请举出反例。

(3) 证明：若 a_n 是单调数列，且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$ ，则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$ 。

(4) 举例说明当 $A = \infty$ 时，(1) 中的结论不成立。

证明 (1) 1° 若 $A \in \mathbb{R}$ ，由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$ 可知 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists N > 0$ 使得 $n > N \implies |a_n - A| < \varepsilon$ ，从而

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{a_i - A}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N |a_i - A| + \frac{n - N}{n} \varepsilon \quad (1.3.38)$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| \leq \varepsilon \quad (1.3.39)$$

再令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 即可得证。 \square

例 1.3.19 (习题 2.4.18 改编)

Cauchy 几何平均。设 $a_n > 0$ ， $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A \in [0, +\infty]$ ，证明： $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = A$ 。

证明 利用习题 2.4.14 的结论可得

$$\frac{a_1 \cdots a_n a_{n+1}}{a_1 \cdots a_n} = a_{n+1} \rightarrow \alpha \implies \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \rightarrow \alpha \quad (1.3.40)$$

\square

例 1.3.20

Toeplitz 定理。设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ， $b_{ij} \geq 0$ 满足

$$\begin{aligned} b_{n1} + b_{n2} + \cdots + b_{nn} &= 1, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_{n1} + b_{n2} + \cdots + b_{nN}) &= 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \quad (1.3.41)$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_{n1} a_1 + b_{n2} a_2 + \cdots + b_{nn} a_n) = A \quad (1.3.42)$$

若取 $b_{nk} = \frac{1}{n}$, 则上述结论即为算术平均值的极限。利用以上结论证明

(1) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$, 求

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \quad (1.3.43)$$

(2) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$, 求

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} \quad (1.3.44)$$

(3) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = B$, 求

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} \quad (1.3.45)$$

(4) 举例说明当 $A = \infty$ 时, (2) 中的结论不成立。

解 采取类似例 1.5.15 的方法, 对平均值进行控制。由极限的定义可知任取 $A_1 < A_3 < A < A_4 < A_2$ (若 $A = 0$, 则只需取 A_4, A_2 ; 若 $A = +\infty$, 则只需取 A_1, A_3), $\exists N > 0$ 使得

$$n > N \implies A_1 < A_3 < a_n < A_4 < A_2 \quad (1.3.46)$$

记 $M_n = \max\{a_1, \dots, a_n\}$, $m_n = \min\{a_1, \dots, a_n\}$, $B_{nk} = \sum_{i=1}^k b_{ni}$, 则有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_{nk} a_k &< M_N \sum_{k=1}^N b_{nk} + A_4 \sum_{k=N+1}^n b_{nk} = (M_N - A_4) B_{nN} + A_4 \stackrel{?}{<} A_2 \\ \sum_{k=1}^n b_{nk} a_k &> m_N \sum_{k=1}^N b_{nk} + A_3 \sum_{k=N+1}^n b_{nk} = (m_N - A_3) B_{nN} + A_3 \stackrel{?}{>} A_1 \end{aligned} \quad (1.3.47)$$

为了控制上面的不等式, 我们需要对 B_{nN} 作合理估计。由于

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{nN} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N b_{nk} = 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \quad (1.3.48)$$

取特定 $\varepsilon' > 0$, $\exists N' > 0$ 使得

$$n > N' \implies 0 \leq B_{nN} < \varepsilon' \quad (1.3.49)$$

因此

$$\begin{aligned} (M_N - A_4) B_{nN} + A_4 &\leq (|M_N| + |A_4|) B_{nN} + A_4 < (|M_N| + |A_4|) \varepsilon' + A_4 \stackrel{?}{<} A_2 \\ (m_N - A_3) B_{nN} + A_3 &\geq -(|m_N| + |A_3|) B_{nN} + A_3 > -(|m_N| + |A_3|) \varepsilon' + A_3 \stackrel{?}{>} A_1 \end{aligned} \quad (1.3.50)$$

取

$$\varepsilon' = \min \left\{ \frac{A_2 - A_4}{|M_N| + |A_4|}, \frac{A_3 - A_1}{|m_N| + |A_3|} \right\} \quad (1.3.51)$$

即可。

整理一下我们目前已有的信息：任取 $A_1 < A_3 < A < A_4 < A_2$, $\exists N'' = \max\{N, N'\} > 0$ 使得

$$\exists N \rightarrow \varepsilon' = \dots \rightarrow \exists N' \rightarrow \exists N'' \rightarrow \left(n > N'' \implies A_1 < \sum_{k=1}^n b_{nk} a_k < A_2 \right) \quad (1.3.52)$$

即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N'' > 0$ 使得 $A - \varepsilon < A_1 < A < A_2 < A + \varepsilon$ 且

$$n > N'' \implies A - \varepsilon < \sum_{k=1}^n b_{nk} a_k < A + \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n b_{nk} a_k = A \quad (1.3.53)$$

利用以上结论证明：

(1) 取 $b_{nk} = 2^{-n} \binom{n}{k}$, 则

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N b_{nk} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} \sum_{k=0}^N \binom{n}{k} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(N+1)n^N}{2^n} = 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \quad (1.3.54)$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n b_{nk} a_k = A \quad (1.3.55)$$

(2) 取 $b_{nk} = \frac{k}{1+2+\dots+n}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N b_{nk} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+\dots+N}{1+2+\dots+n} = 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \quad (1.3.56)$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n b_{nk} a_k = \frac{1}{2} A \quad (1.3.57)$$

(3) 设 $A_n = a_n - A$, $B_n = b_n - B$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = 0$, 此时原式可化为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_{n+1-k} b_k}{n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (A + A_{n+1-k})(B + B_k) \\ &= AB + A \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n B_k + B \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_k + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_{n+1-k} B_k \\ &= AB + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_{n+1-k} B_k \end{aligned} \quad (1.3.58)$$

故不妨令 $A = B = 0$ 。由于数列 $\{a_n\}$ 存在极限, 故 $\{a_n\}$ 有界, 即 $|a_n| \leq A'$, 此时有

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{n+1-k} b_k \right| \leq \frac{A'}{n} \sum_{k=1}^n |b_k| \rightarrow A' \cdot B = 0, \quad n \rightarrow +\infty \quad (1.3.59)$$

故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n} = 0 \quad (1.3.60)$$

□

1.3.6 Stolz 及其应用

例 1.3.21

Stolz 定理。

(1) $\frac{\infty}{\infty}$: 设 $\{x_n\}$ 严格增且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = A$ 。证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} = A$ 。(2) $\frac{0}{0}$: 设 $\{x_n\}$ 严格减且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = A$ 。证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} = A$ 。

利用以上结论证明:

(1) 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$ 。(2) 设 $\alpha > -1$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$ 。(3) 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^{-1} + 2^{-1} + \cdots + n^{-1}}{\ln n}$ 。

解 (1) 由极限的定义可知任取 $A_1 < A_3 < A < A_4 < A_2$ (若 $A = 0$, 则只需取 A_4, A_2 ; 若 $A = +\infty$, 则只需取 A_1, A_3), $\exists N > 0$ 使得

$$n > N \implies A_1 < A_3 < \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} < A_4 < A_2 \quad (1.3.61)$$

由于 $\{x_n\}$ 严格增, 故有

$$A_3(x_n - x_{n-1}) < y_n - y_{n-1} < A_4(x_n - x_{n-1}) \quad (1.3.62)$$

对 $n = N + 1, N + 2, \dots, m$ 求和可得

$$A_3(x_m - x_N) < y_m - y_N < A_4(x_m - x_N) \quad (1.3.63)$$

凑出 $\frac{y_m}{x_m}$, 得

$$A_1 < A_3 + \frac{y_N - A_3 x_N}{x_m} < \frac{y_m}{x_m} < A_4 + \frac{y_N - A_4 x_N}{x_m} < A_2 \quad (1.3.64)$$

由于 $\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m = +\infty$, 选择 M 使得

$$m > M \implies x_m > \max \left\{ \frac{A_3 x_N - y_N}{A_3 - A_1}, \frac{y_N - A_4 x_N}{A_2 - A_4} \right\} \quad (1.3.65)$$

故 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $A_{1,2} = A \pm \varepsilon$, 即可得证。(2) 类似地, 任取 $A_1 < A < A_2$ (若 $A = 0$, 则只需取 A_2 ; 若 $A = +\infty$, 则只需取 A_1), $\exists N > 0$ 使得

$$n > N \implies A_1 < \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} < A_2 \quad (1.3.66)$$

由于 $\{x_n\}$ 严格减, 故有

$$A_1(x_n - x_{n+1}) < y_n - y_{n+1} < A_2(x_n - x_{n+1}) \quad (1.3.67)$$

求和至 $n = m - 1$ 可得

$$A_1(x_n - x_m) < y_n - y_m < A_2(x_n - x_m) \quad (1.3.68)$$

令 $m \rightarrow +\infty$ 可得

$$A_1 x_n \leq y_n \leq A_2 x_n \quad (1.3.69)$$

由此可得

$$A_1 \leq \frac{y_n}{x_n} \leq A_2 \quad (1.3.70)$$

故 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $A_{1,2} = A \pm \varepsilon$, 即可得证。

利用以上结论证明:

(1) 由题可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n! - (n-1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n-1} = 1 \quad (1.3.71)$$

(2) 由题可知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - (1 - \frac{1}{n})^{\alpha+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{(1+x)^{\alpha+1} - 1} = \frac{1}{\alpha+1} \end{aligned} \quad (1.3.72)$$

(3) 由题可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^{-1} + 2^{-1} + \cdots + n^{-1}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^{-1}}{\ln(1-n^{-1})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1 \quad (1.3.73)$$

□

定理 1.3.22

Stolz 定理的上下极限版本。如果以下两个条件之一成立:

- $\{x_n\}$ 严格增且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$;
- $\{x_n\}$ 严格减且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ 。

则

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \quad (1.3.74)$$

其证明只需要把验证码改成任取 $A_1 < A_3 < l < L < A_2 < A_4$, 其中 l, L 分别为 $\frac{y_n}{x_n}$ 的下、上极限, 然后进行类似的估计即可。

注

(1) Stolz 定理 $\frac{*}{\infty}$ 情形还可以采用 Toeplitz 定理来证明。记 $x_0 = y_0 = 0$ 。取 $a_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$, $b_{nk} = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_n}$, 由 Toeplitz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n b_{nk} a_k = A \quad (1.3.75)$$

(2) Stolz 定理 $\frac{*}{\infty}$ 情形的图像解释如图 1.3.1 所示。将 (x_n, y_n) 在平面直角坐标系中描出, 相邻两点的连线斜率即为 $\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$ 。由于 $\{x_n\}$ 严格增, 故相邻两点连线构成的折线一定严格向右延伸。由于每一段折线斜率的极限为 A , 故当 $n > N$ 时, 从 (x_n, y_n) 出发的折线一定位于 (x_n, y_n) 与斜率为 A_3, A_4 的射线围成的区域内, 而这个区域内的所有点与原点连线的斜率 (即 $\frac{y_n}{x_n}$) 不会偏离 A_3, A_4 太远。由于 $\{x_n\} \rightarrow +\infty$, 只要折线距离原点越远, 偏离的程度就可以被 A_1, A_2 控制。

(3) Stolz 定理的逆定理不成立, 即若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} = A$, 则不一定有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = A$ 。例如, 取 $x_n = n$, $y_n = n + (-1)^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} = 1$, 但 $\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 2 \times (-1)^n$, 极限不存在。

(4) 如果把 Stolz 定理改成如下函数形式版本: 如果以下两个条件之一成立:

- f 严格增且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
- f 严格减且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ 。

以下类似命题并不成立

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) - g(x-1)}{f(x) - f(x-1)} \leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) - g(x-1)}{f(x) - f(x-1)} \quad (1.3.76)$$

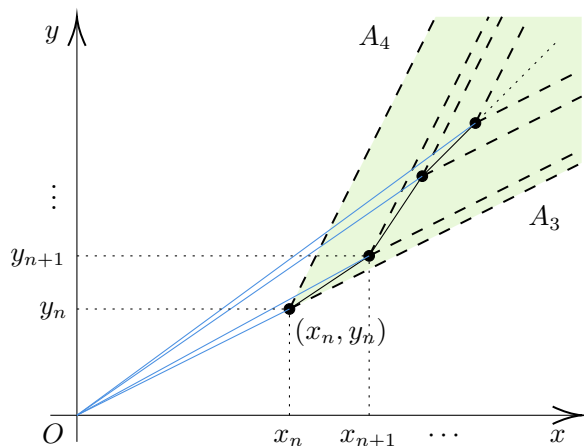


图 1.3.1: Stolz 定理 $\frac{*}{\infty}$ 的图像解释

例 1.3.23 (习题 2.4.10)

证明:

$$(1) \forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

$$(2) \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

(3) 数列 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ 单调递减。

(4) 数列 $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$ 单调递增。

(5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ 存在且相等, 这个共同的极限值 γ 称为 Euler 常数。以 a_n 作为 γ 的近似值, 并确保误差小于 10^{-4} , 问 n 至少应该是多少?

$$(6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right) = \ln 2.$$

$$(7) \forall a \geq 0, \forall m \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{k+a} = \ln m.$$

证明 (1) 在第一次习题课中, 我们证明了

$$x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} =: y_n \quad (1.3.77)$$

因此 $\{x_n\}$ 严格增且有上界 y_1 , $\{y_n\}$ 严格减且有下界 x_1 , 故两者极限均存在且均为 e , 同时满足

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n \quad (1.3.78)$$

(2) 对 (1) 的结论两边取自然对数可得

$$\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n} \quad (1.3.79)$$

(3) 注意到

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0 \quad (1.3.80)$$

故 $\{a_n\}$ 严格减。

(4) 注意到

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0 \quad (1.3.81)$$

故 $\{b_n\}$ 严格增。

(5) 由 (3)(4) 可知 $\{a_n\}$ 严格减且有下界 b_1 , $\{b_n\}$ 严格增且有上界 a_1 , 故两个极限均存在, 且显然相等。若以 a_n 作为 γ 的近似值, 令

$$f(x) := \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2(1+x)} \quad (1.3.82)$$

$\forall x \geq 0$, 有

$$f^{(3)}(x) = \frac{-1+2x}{(1+x)^4} \geq -1, \quad f^{(4)}(x) = \frac{6(1-x)}{(1+x)^5} \leq 6 \quad (1.3.83)$$

取 $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$, 由带 Lagrange 余项的 Taylor 展开可得 $\exists \xi, \eta \in (0, x_0)$, 使得

$$-\frac{1}{6}x^3 \leq \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3 = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2(1+x)^2} = -\frac{x^3}{6} + \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}x^4 \leq -\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4} \quad (1.3.84)$$

设 $m > n \geq 1$, 则

$$\begin{aligned} a_n - a_m &= \sum_{k=n}^{m-1} \left(\ln \frac{1+k}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \geq \sum_{k=n}^{m-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{6k^3} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) - \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{6k^3} \\ a_n - a_m &= \sum_{k=n}^{m-1} \left(\ln \frac{1+k}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{6k^3} + \frac{1}{4k^4} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) + \sum_{k=n}^{m-1} \left(\frac{1}{4k^4} - \frac{1}{6k^3} \right) \end{aligned} \quad (1.3.85)$$

令 $m \rightarrow +\infty$ 可得

$$\frac{1}{2n} - \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{6k^3} \leq a_n - \gamma \leq \frac{1}{2n} + \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{4k^4} - \frac{1}{6k^3} \right) \quad (1.3.86)$$

采用积分放缩可得

$$0 \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} \leq a_n - \gamma \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{12(n-1)^3} - \frac{1}{12n^2} \quad (1.3.87)$$

令

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(n) &= \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{12(n-1)^2} > 10^{-4} \\ \varepsilon_2(n) &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{12(n-1)^3} - \frac{1}{12n^2} \leq 10^{-4} \end{aligned} \quad (1.3.88)$$

解得

$$4999.83 \leq n < 5000.83 \quad (1.3.89)$$

故 $n = 5000$ 。

(6) 注意到

$$a_{2n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln 2 = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 \quad (1.3.90)$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 可得

$$\gamma - \gamma = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln 2 \implies \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 \quad (1.3.91)$$

此外还有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = \ln 2 \quad (1.3.92)$$

综合以上两种情况可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 \quad (1.3.93)$$

(7) 注意到

$$a_{mn} - a_n = \sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \ln m \quad (1.3.94)$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 可得

$$\gamma - \gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{k} - 0 - \ln m \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{k} = \ln m \quad (1.3.95)$$

设 $[a] = dm + r$, 其中 $d \in \mathbb{N}$, $r \in [0, m) \cap \mathbb{N}$, 则

$$\sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{k+a} \geq \sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{k+dm+r} \geq \sum_{k=n+d}^{m(n+d)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+d}^{n+[a]} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+d}^{m(n+d)} \frac{1}{k} - \frac{[a]}{n} \quad (1.3.96)$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 由夹挤定理可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{k+a} = \ln m \quad (1.3.97)$$

□

例 1.3.24 (习题 2.5.6)

设 $a_0 > 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$.

(1) 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

(2) 对不同的初值 a_0 , 用 Excel 计算数列 a_n 的前 1000 项的值、绘制散点图并添加趋势线, 观察点列 (n, a_n) 的变化, 猜测 a_n 关于 n 的阶数以及渐近表达式。

(3) 证明你在 (2) 中得到的猜想。

解 (1) 显然 $a_n > a_0 > 0$ 且严格增。假设 $a_n \rightarrow A < +\infty$, 则有 $A \geq a_0 > 0$ 且 $A = A + \frac{1}{A}$, 矛盾。故 $A = +\infty$ 。

(2) 设 $a_0 = 1$, 观察图像并添加趋势线可知 $a_n = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ 。

(3) 注意到

$$a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} > a_{n-1}^2 + 2 \implies a_n^2 > a_0^2 + 2n \implies a_n > \sqrt{2n} \quad (1.3.98)$$

此外还有

$$\begin{aligned} a_n &= a_2 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{a_k} < a_2 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2k}} < a_2 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2k - 2(k-1)}{\sqrt{2k} + \sqrt{2(k-1)}} \\ &= a_2 + \sum_{k=2}^{n-1} \left[\sqrt{2k} - \sqrt{2(k-1)} \right] = a_2 + \sqrt{2(n-1)} - \sqrt{2} < \sqrt{2n} + a_2 - \sqrt{2} \end{aligned} \quad (1.3.99)$$

故有

$$\sqrt{2n} < a_n < \sqrt{2n} + a_2 - \sqrt{2} \implies a_n = \sqrt{2n} + o(\sqrt{n}) \quad (1.3.100)$$

另解：考虑使用 Stolz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^2 - a_{n-1}^2}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} \right) = 2 \quad (1.3.101)$$

□

例 1.3.25

设 $x_0 > 0$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$, 试证明:

$$x_n^2 = 2n + \frac{1}{2} \ln n + \mathcal{O}(1) \quad (1.3.102)$$

证明 容易证明 $\{x_n\}$ 严格增且趋于 $+\infty$ 。由递推关系式可得

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2} = x_n^2 + \mathcal{O}(1) \quad (1.3.103)$$

求和可得

$$x_n^2 = \mathcal{O}(n) \quad (1.3.104)$$

代入递推关系式可得

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2} = x_n^2 + 2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1.3.105)$$

再求和可得

$$x_n^2 = 2n + \mathcal{O}(\ln n) \quad (1.3.106)$$

再代入递推关系式可得

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \frac{1}{2n + \mathcal{O}(\ln n)} = x_n^2 + 2 + \frac{1}{2n} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right) \right] = x_n^2 + 2 + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \quad (1.3.107)$$

三求和可得

$$x_n^2 = 2n + \frac{1}{2} \ln n + \mathcal{O}(1) \quad (1.3.108)$$

□

注 一般地, $\sum_{k=1}^n \mathcal{O}(1) \neq \mathcal{O}(n)$, 例如 $\sum_{k=1}^n k = \mathcal{O}(n^2)$ 。本题中的 \mathcal{O} 对所有求和项一致 (即与求和指标 k 无关), 故可直接相加。

例 1.3.26

设 $x_0 \in (0, 1)$, $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ 。

(1) 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 并求出该极限值。

(2) 计算: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \right)$ 。

(3) 计算: $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n$ 。

(4) 计算: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1-nx_n)}{\ln n}$ 。

解 (1) 容易证明 $\{x_n\}$ 从 $n=1$ 起严格减且有下界 0, 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ 。

(2) 直接计算可得

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n(1-x_n)} = \frac{x_n}{1-x_n} \rightarrow 0 \quad (1.3.109)$$

(3) 由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n^2(1-x_n)}{x_n^2} = 1 \quad (1.3.110)$$

(4) 结合 (2) 的结论, 由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1-nx_n)}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-nx_n}{x_n \ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x_n} - n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} - 1}{\ln(n+1) - \ln n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n+1} - x_n x_{n+1}}{x_n x_{n+1} \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n^3}{x_n^3(1-x_n)} = 1 \end{aligned} \quad (1.3.111)$$

□

例 1.3.27

设 $x_0 \in (0, 1)$, $x_{n+1} = x_n(1-x_n)$, 试证明:

$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (1.3.112)$$

证明 容易证明 $\{x_n\}$ 从 $n=1$ 起严格减且有下界 0, 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ 。由递推关系式可得

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n(1-x_n)} = \frac{1}{x_n} + 1 + x_n + \mathcal{O}(x_n^2) = \frac{1}{x_n} + \mathcal{O}(1) \quad (1.3.113)$$

求和可得

$$\frac{1}{x_n} = \mathcal{O}(n) \implies x_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1.3.114)$$

代入渐近展开可得

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1.3.115)$$

再求和可得

$$\frac{1}{x_n} = n + \mathcal{O}(\ln n) \implies x_n = \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \quad (1.3.116)$$

再代入渐近展开可得

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + 1 + \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \quad (1.3.117)$$

三求和可得

$$\frac{1}{x_n} = n + \ln n + \mathcal{O}(1) \implies x_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (1.3.118)$$

□

例 1.3.28

设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \sin x_n$.

(1) 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 并求出该极限值。

(2) 计算: $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n^2$ 。

(3) 计算: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(3-nx_n^2)}{\ln n}$ 。

解 (1) 容易证明 $\{x_n\}$ 严格减且有下界 0, 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ 。

(2) 由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 x_n}{1 - \left(1 - \frac{1}{6}x_n^2 + o(x_n^2)\right)^2} = 3 \quad (1.3.119)$$

(3) 结合 (2) 的结论, 由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(3-nx_n^2)}{\ln n} &= 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3-nx_n^2}{x_n^2 \ln n} = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x_n^2} - n}{\ln n} = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x_{n+1}^2} - \frac{3}{x_n^2} - 1}{\ln(n+1) - \ln n} \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - 3\left(1 - \frac{1}{6}x_n^2 + \frac{1}{120}x_n^4\right)^2 - \left(x_n - \frac{1}{6}x_n^3\right)^2 + o(x_n^4)}{\frac{1}{n} \sin^2 x_n} \\ &= 9 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{5}x_n^4 + o(x_n^4)}{x_n^4} = \frac{9}{5} \end{aligned} \quad (1.3.120)$$

□

例 1.3.29

设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \sin x_n$, 试证明:

$$x_n^2 = \frac{3}{n} - \frac{9 \ln n}{5n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (1.3.121)$$

提示: $\csc^2 x$ 在 $x = 0$ 附近的渐近展开为

$$\csc^2 x = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + \mathcal{O}(x^4), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.3.122)$$

证明 容易证明 $\{x_n\}$ 严格减且有下界 0, 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ 。结合 $\csc^2 x$ 的渐近展开可得

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} = \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{3} + \frac{x_n^2}{15} + \mathcal{O}(x_n^4) = \frac{1}{x_n^2} + \mathcal{O}(1) \quad (1.3.123)$$

求和可得

$$\frac{1}{x_n^2} = \mathcal{O}(n) \implies x_n^2 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1.3.124)$$

代入渐近展开可得

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} = \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1.3.125)$$

再求和可得

$$\frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{3}n + \mathcal{O}(\ln n) \implies x_n^2 = \frac{3}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \quad (1.3.126)$$

再代入渐近展开可得

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} = \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \quad (1.3.127)$$

三求和可得

$$\frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{3}n + \frac{1}{5}\ln n + \mathcal{O}(1) \implies x_n^2 = \frac{3}{n} - \frac{9\ln n}{5n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (1.3.128)$$

□

例 1.3.30

已知数列 x_n 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2x_{n+1} + x_n) = A \in \mathbb{R}$ 。证明: x_n 收敛。

1.4 雨课堂作业

1.4.1 确界, 连续函数与函数极限

例 1.4.1 (刘/闫/章· 习题 1.1.8, 作业第 1 题 (2)(3)(4))

设 A, B 均为非空有界数集, 且 $A \cap B$ 非空, 证明:

(1) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$ 。

(2) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ 。

(3) $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$ 。

(4) $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$ 。

(5) 是否必然成立 $\sup(A \cap B) = \min\{\sup A, \sup B\}$? 论证你的判断。

证明 (1) 记 $m = \min\{\inf A, \inf B\}$ 。下证 m 是 $A \cup B$ 的下界。 $\forall x \in A \cup B$, $x \in A$ 或 $x \in B$ 。若 $x \in A$, 则 $x \geq \inf A \geq m$; 若 $x \in B$, 则 $x \geq \inf B \geq m$ 。因此 m 是 $A \cup B$ 的下界。

下证 $m = \inf(A \cup B)$ 。假设 $m \neq \inf(A \cup B)$, 则 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $m + \varepsilon$ 是 $A \cup B$ 的下界, 即 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $\forall x \in A \cup B$, 都有 $x \geq m + \varepsilon$ 。不妨设 $m = \inf A$, 则 $\forall x \in A$, 都有 $x \geq m + \varepsilon$, 与 m 是 A 的下确界矛盾。因此 $m = \inf(A \cup B)$ 。

(2) 记 $M = \max\{\sup A, \sup B\}$ 。下证 M 是 $A \cup B$ 的上界。 $\forall x \in A \cup B$, $x \in A$ 或 $x \in B$ 。若 $x \in A$, 则 $x \leq \sup A \leq M$; 若 $x \in B$, 则 $x \leq \sup B \leq M$ 。因此 M 是 $A \cup B$ 的上界。

下证 $M = \sup(A \cup B)$ 。假设 $M \neq \sup(A \cup B)$, 则 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $M - \varepsilon$ 是 $A \cup B$ 的上界, 即 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $\forall x \in A \cup B$, 都有 $x \leq M - \varepsilon$ 。不妨设 $M = \sup A$, 则 $\forall x \in A$, 都有 $x \leq M - \varepsilon$, 与 M 是 A 的上确界矛盾。因此 $M = \sup(A \cup B)$ 。

(3) 记 $m = \max\{\inf A, \inf B\}$ 。原命题等价于证明 m 是 $A \cap B$ 的下界。 $\forall x \in A \cap B$, $x \in A$ 且 $x \in B$, 则 $x \geq \inf A$ 且 $x \geq \inf B$, 故 $x \geq m$ 。

(4) 记 $M = \min\{\sup A, \sup B\}$ 。原命题等价于证明 M 是 $A \cap B$ 的上界。 $\forall x \in A \cap B$, $x \in A$ 且 $x \in B$, 则 $x \leq \sup A$ 且 $x \leq \sup B$, 故 $x \leq M$ 。

(5) 显然不一定成立, 如 $A = \{0, 1\}$ 、 $B = \{0, 2\}$, 此时 $\sup(A \cap B) = 0$, 而 $\min\{\sup A, \sup B\} = 1$ 。 \square

另解 采用逻辑语言证明。熟知重言式

$$\begin{aligned}(A \vee B) \rightarrow C &= (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \\ (A \wedge B) \rightarrow C &= (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C) \\ (\forall x)(A \wedge B) &= (\forall x)A \wedge (\forall x)B \\ (\forall x)(A \vee B) &\Leftarrow (\forall x)A \vee (\forall x)B\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

因此

$$\begin{aligned}\inf(A \cup B) &= \max\{m \in \mathbb{R} \mid (\forall x)(x \in A \vee x \in B \implies x \geq m)\} \\ &= \max\{m \in \mathbb{R} \mid (\forall x)[(x \in A \implies x \geq m) \wedge (x \in B \implies x \geq m)]\} \\ &= \max\{m \in \mathbb{R} \mid (\forall x)(x \in A \implies x \geq m) \wedge (\forall x)(x \in B \implies x \geq m)\} \\ &= \max\{m \in \mathbb{R} \mid m \leq \inf A \wedge m \leq \inf B\} \\ &= \max\{m \in \mathbb{R} \mid m \leq \min\{\inf A, \inf B\}\} \\ &= \min\{\inf A, \inf B\}\end{aligned}\tag{1.4.2}$$

第(2)题同理。在证明第(3)题时, 需要注意

$$\begin{aligned}S &:= \{m \in \mathbb{R} \mid (\forall x)(x \in A \wedge x \in B \implies x \geq m)\} \\ &= \{m \in \mathbb{R} \mid (\forall x)[(x \in A \implies x \geq m) \vee (x \in B \implies x \geq m)]\} \\ &\supseteq \{m \in \mathbb{R} \mid (\forall x)(x \in A \implies x \geq m) \vee (\forall x)(x \in B \implies x \geq m)\} \\ &= \{m \in \mathbb{R} \mid m \leq \inf A \vee m \leq \inf B\} \\ &= \{m \in \mathbb{R} \mid m \leq \max\{\inf A, \inf B\}\}\end{aligned}\tag{1.4.3}$$

因此

$$\begin{aligned}\inf(A \cap B) &= \max\{m \in \mathbb{R} \mid (\forall x)(x \in A \wedge x \in B \implies x \geq m)\} \\ &\geq \max\{m \in \mathbb{R} \mid m \leq \max\{\inf A, \inf B\}\} \\ &= \max\{\inf A, \inf B\}\end{aligned}\tag{1.4.4}$$

□

例 1.4.2 (刘/闫/章· 习题 1.1.9, 作业第 1 题 (1))

设 A, B 均为非空有界数集, 定义

$$\begin{aligned}A + B &= \{x + y \mid x \in A, y \in B\} \\ AB &= \{xy \mid x \in A, y \in B\}\end{aligned}\tag{1.4.5}$$

证明:

- (1) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ 。
- (2) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ 。
- (3) 当 $A, B \subseteq \{x \mid x \geq 0\}$ 时, 有 $\inf AB = \inf A \cdot \inf B$, $\sup AB = \sup A \cdot \sup B$ 。

证明 (1) 记 $m = \inf A + \inf B$ 。下证 m 是 $A+B$ 的下界。 $\forall x \in A+B, \exists x_1 \in A, x_2 \in B$ 使得 $x = x_1 + x_2$, 则 $x = x_1 + x_2 \geq \inf A + \inf B = m$ 。

下证 $m = \inf(A+B)$ 。假设 $m \neq \inf(A+B)$, 则 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $m + 2\varepsilon$ 是 $A+B$ 的下界。根据下确界的定义可知 $\exists x_1 \in A, x_2 \in B$ 使得 $\inf A + \varepsilon > x_1 \geq \inf A, \inf B + \varepsilon > x_2 \geq \inf B$, 则 $x_1 + x_2 \in A+B$, 且

$$x_1 + x_2 < \inf A + \inf B + 2\varepsilon = m + 2\varepsilon \quad (1.4.6)$$

与 $m + 2\varepsilon$ 是 $A+B$ 的下界矛盾。因此 $m = \inf(A+B)$ 。

(2) 记 $M = \sup A + \sup B$ 。下证 M 是 $A+B$ 的上界。 $\forall x \in A+B, \exists x_1 \in A, x_2 \in B$ 使得 $x = x_1 + x_2$, 则 $x = x_1 + x_2 \leq \sup A + \sup B = M$ 。

下证 $M = \sup(A+B)$ 。假设 $M \neq \sup(A+B)$, 则 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $M - 2\varepsilon$ 是 $A+B$ 的上界。根据上确界的定义可知 $\exists x_1 \in A, x_2 \in B$ 使得 $\sup A - \varepsilon < x_1 \leq \sup A, \sup B - \varepsilon < x_2 \leq \sup B$, 则 $x_1 + x_2 \in A+B$, 且

$$x_1 + x_2 > \sup A + \sup B - 2\varepsilon = M - 2\varepsilon \quad (1.4.7)$$

与 $M - 2\varepsilon$ 是 $A+B$ 的上界矛盾。因此 $M = \sup(A+B)$ 。

(3) 记 $m = \inf A \cdot \inf B$ 。下证 m 是 AB 的下界。 $\forall x \in AB, \exists x_1 \in A, x_2 \in B$ 使得 $x = x_1 x_2$, 则 $x = x_1 x_2 \geq \inf A \cdot \inf B = m$ 。

下证 $m = \inf(AB)$ 。假设 $m \neq \inf(AB)$, 则 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $m + \varepsilon$ 是 AB 的下界。根据下确界的定义可知取特定 $\varepsilon' \in (0, 1)$, $\exists x_1 \in A, x_2 \in B$ 使得 $\inf A + \varepsilon' > x_1 \geq \inf A, \inf B + \varepsilon' > x_2 \geq \inf B$, 则 $x_1 x_2 \in AB$, 且

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &< (\inf A + \varepsilon')(\inf B + \varepsilon') = \inf A \cdot \inf B + \varepsilon'(\inf A + \inf B) + \varepsilon'^2 \\ &< m + \varepsilon'(\inf A + \inf B + 1) \stackrel{?}{=} m + \varepsilon \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

取 $\varepsilon' = 1/(\inf A + \inf B + 1)$ 。这与 $m + \varepsilon$ 是 AB 的下界矛盾, 因此 $m = \inf(AB)$ 。

记 $M = \sup A \cdot \sup B$ 。下证 M 是 AB 的上界。 $\forall x \in AB, \exists x_1 \in A, x_2 \in B$ 使得 $x = x_1 x_2$, 则 $x = x_1 x_2 \leq \sup A \cdot \sup B = M$ 。

下证 $M = \sup(AB)$ 。假设 $M \neq \sup(AB)$, 则 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $M - \varepsilon$ 是 AB 的上界。根据上确界的定义可知取特定 $\varepsilon' \in (0, 1)$, $\exists x_1 \in A, x_2 \in B$ 使得 $\sup A - \varepsilon' < x_1 \leq \sup A, \sup B - \varepsilon' < x_2 \leq \sup B$, 则 $x_1 x_2 \in AB$, 且

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &> (\sup A - \varepsilon')(\sup B - \varepsilon') = \sup A \cdot \sup B - \varepsilon'(\sup A + \sup B) + \varepsilon'^2 \\ &> M - \varepsilon'(\sup A + \sup B + 1) \stackrel{?}{=} M - \varepsilon \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

取 $\varepsilon' = 1/(\sup A + \sup B + 1)$ 。这与 $M - \varepsilon$ 是 AB 的上界矛盾, 因此 $M = \sup(AB)$ 。 \square

另解 采用逻辑语言证明。熟知重言式

$$(\forall x)(p \wedge Q(x) \rightarrow R(x)) = p \rightarrow (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \quad (1.4.10)$$

因此

$$\begin{aligned}
 \inf(A+B) &= \max\{m \in \mathbb{R} \mid (\forall x_1)(\forall x_2)(x_1 \in A \wedge x_2 \in B \implies x_1 + x_2 \geq m)\} \\
 &= \max\{m \in \mathbb{R} \mid (\forall x_1)(x_1 \in A \implies (\forall x_2)(x_2 \in B \implies x_2 \geq m - x_1))\} \\
 &= \max\{m \in \mathbb{R} \mid (\forall x_1)(x_1 \in A \implies \inf B \geq m - x_1)\} \\
 &= \max\{m \in \mathbb{R} \mid (\forall x_1)(x_1 \in A \implies x_1 \geq m - \inf B)\} \\
 &= \max\{m \in \mathbb{R} \mid m \leq \inf A + \inf B\} \\
 &= \inf A + \inf B
 \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

第(2)(3)(4)题同理。 □

例 1.4.3 (作业第2题)

幂函数的极限。对实数 α ，求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$ ，并利用以上结果求极限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{3+6x} - 3}{\sqrt{x} - 2} \tag{1.4.12}$$

注意：不许用导数、不许用 L'Hôpital 法则。

证明 循序渐进地对 α 分情况讨论。

(1) 当 $\alpha = n \in \mathbb{N}$ 时，由二项式定理可得

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \cdots + x^n \tag{1.4.13}$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[n + \frac{n(n-1)}{2} x + \cdots + x^{n-1} \right] = n \tag{1.4.14}$$

(2) 当 $\alpha = \frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$) 时，令

$$y := (1+x)^{\frac{1}{n}} - 1, \quad x \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0 \tag{1.4.15}$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{m}{n}} - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^m - 1}{(1+y)^n - 1} = \frac{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^m - 1}{y}}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{y}} = \frac{m}{n} \tag{1.4.16}$$

(3) 当 $\alpha \geq 0$ 时， $\alpha = 0$ 退化为 $\alpha \in \mathbb{N}$ ，故仅讨论 $\alpha > 0$ 。 $\forall \varepsilon > 0$ ，由有理数的稠密性，存在 $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}^+$ 使得

$$\max\left\{\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, 0\right\} < \frac{m_1}{n_1} < \alpha < \frac{m_2}{n_2} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.4.17}$$

由极限的定义可知 $\forall \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ ， $\exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ 使得

$$0 < x < \delta \implies \alpha - \varepsilon < \frac{m_i}{n_i} - \varepsilon' < \frac{(1+x)^{\frac{m_i}{n_i}} - 1}{x} < \frac{m_i}{n_i} + \varepsilon' < \alpha + \varepsilon, \quad i = 1, 2 \tag{1.4.18}$$

不论 $x \geq 0$, $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$ 均关于 α 严格增, 故由单调性可知

$$\alpha - \varepsilon < \frac{(1+x)^{\frac{m_1}{n_1}} - 1}{x} < \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} < \frac{(1+x)^{\frac{m_2}{n_2}} - 1}{x} < \alpha + \varepsilon \quad (1.4.19)$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad (1.4.20)$$

(4) 当 $\alpha < 0$ 时, 注意到

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+x)^{-\alpha}}{x(1+x)^{-\alpha}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x)^{-\alpha}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{-\alpha} - 1}{x} = \alpha \quad (1.4.21)$$

由此可得命题对 $\alpha \in \mathbb{R}$ 成立。

计算极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{1/2} - 1}{x} + \frac{(1-x)^{1/3} - 1}{-x} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \quad (1.4.22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{3+6x} - 3}{\sqrt{x} - 2} \stackrel{x=t+4}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(27+6t)^{1/3} - 3}{(4+t)^{1/2} - 2} = \frac{3}{2} \times \frac{\frac{2}{9} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{2}{3}t)^{1/3} - 1}{\frac{2}{9}t}}{\frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{1}{4}t)^{1/2} - 1}{\frac{1}{4}t}} = \frac{3}{2} \times \frac{\frac{2}{9} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}} = \frac{8}{9} \quad (1.4.23)$$

□

例 1.4.4 (习题 2.2.3 节选, 作业第 3 题)

三角函数的极限。利用 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 求以下极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$ 。

(2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$ 。

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$ 。

解 (1) 令 $h = x - a$, 则 $x \rightarrow a$ 等价于 $h \rightarrow 0$, 因此

$$\frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \frac{\sin \frac{h}{2} \cos \left(a + \frac{h}{2} \right)}{\frac{h}{2}} \rightarrow \cos a, \quad h \rightarrow 0 \quad (1.4.24)$$

(2) 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \stackrel{x = \frac{\pi}{2} - t}{=} - \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2} - a} \frac{\sin t - \sin \left(\frac{\pi}{2} - a \right)}{t - \left(\frac{\pi}{2} - a \right)} = - \cos \left(\frac{\pi}{2} - a \right) = - \sin a \quad (1.4.25)$$

(3)

$$\begin{aligned}
 \text{LHS} &= \frac{1 - [1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)] [1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2)]^{1/2} [1 - \frac{1}{2}(3x)^2 + o(x^2)]^{1/3}}{x^2} \\
 &= \frac{1 - [1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)] [1 - x^2 + o(x^2)]^{1/2} [1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)]^{1/3}}{x^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}x^2 + x^2 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} \rightarrow 3, \quad x \rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{1.4.26}$$

□

例 1.4.5 (作业第 4 题)

连续函数按序排列。

- (1) 设 f, g 都是 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上的连续函数, 证明: $\max\{f(x), g(x)\}$ 、 $\min\{f(x), g(x)\}$ 都是 I 上的连续函数。
- (2) 设 f_1, f_2, \dots, f_n 都是 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上的连续函数。对任意 $x \in I$, 把函数值 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 从小到大排列得到 $g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots \leq g_n(x)$ 。证明: $g_k(x)$ 都是 I 上的连续函数。

证明 (1) \max 、 \min 可用绝对值函数表示为

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}, \quad \min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2} \tag{1.4.27}$$

而四则运算及绝对值函数均保持连续性, 故 $\max\{f(x), g(x)\}$ 、 $\min\{f(x), g(x)\}$ 都是 I 上的连续函数。

(2) 采用数学归纳法。 $n = 1, 2$ 时, 由 (1) 知结论成立。假设结论对 n 成立, 即由 f_1, f_2, \dots, f_n 确定的 g_1, g_2, \dots, g_n 都连续, 现在引入 f_{n+1} , 下证由 f_1, f_2, \dots, f_{n+1} 确定的 $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_{n+1}$ 也都连续。

注意到 $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_{n+1}$ 可表示为

$$\tilde{g}_1(x) = \min\{g_1(x), f_{n+1}(x)\}, \quad \tilde{g}_{n+1}(x) = \max\{g_n(x), f_{n+1}(x)\} \tag{1.4.28}$$

$$\tilde{g}_k(x) = \max\{g_{k-1}(x), \min\{g_k(x), f_{n+1}(x)\}\}, \quad k = 2, 3, \dots, n \tag{1.4.29}$$

因此 $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_{n+1}$ 都连续。由数学归纳法可知结论对任意 n 成立。 □**例 1.4.6 (作业第 5 题)**单调函数扩充。设 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ 是单调不减函数, 满足 $f(\mathbb{Q})$ 在 \mathbb{R} 中稠密。证明:

- (1) 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 极限 $g(x) = \lim_{r \rightarrow x} f(r)$ 存在。
- (2) 对任意 $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = f(x)$ 。
- (3) 函数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 单调不减, 且若 f 严格增, 则 g 也严格增。
- (4) g 是连续函数。

证明 (1)(2) 由于 \mathbb{Q} 在 \mathbb{R} 中稠密, 故 $\exists r_1, s_1 \in \mathbb{Q}$ 使得 $x-1 < r_1 < x < s_1 < x+1$ 。依据以下规则构造数列 $\{r_n\}, \{s_n\}$: 选择 $r_{n+1}, s_{n+1} \in \mathbb{Q}$ 使得 $r_n < r_{n+1} < x < s_{n+1} < s_n$ 。由于 f 单调不减, 故 $f(r_n) \leq f(r_{n+1}) \leq f(s_{n+1}) \leq f(s_n)$ 。由单调有界收敛定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = x$ 。

$\{f(r_n)\}$ 单调不减且有上界 $f(s_1)$, $\{f(s_n)\}$ 单调不增且有下界 $f(r_1)$, 因此 $L_1 := \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n)$ 和 $L_2 := \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n)$ 均存在, 且由极限的保序性可得 $L_1 \leq L_2$ 。若 $x \in \mathbb{Q}$, 由极限的保序性可得 $L_1 \leq f(x) \leq L_2$ 。假设 $L_1 < L_2$, 取

$$L := \begin{cases} \frac{L_1+L_2}{2}, & x \notin \mathbb{Q} \vee f(x) = L_1 \\ \frac{L_1+f(x)}{2}, & f(x) \neq L_1 \end{cases}, \quad \delta := \begin{cases} \frac{L_2-L_1}{4}, & x \notin \mathbb{Q} \vee f(x) = L_1 \\ \frac{f(x)-L_1}{4}, & f(x) \neq L_1 \end{cases} \quad (1.4.30)$$

由此可得 $L_1 < L - \delta < L < L + \delta < L_2$ 。

$\forall r \in \mathbb{Q}$ 且 $r < x$, 由于 $\{r_n\}$ 严格增且趋于 x , 故 $\exists n \in \mathbb{N}^*$ 使得 $r < r_n$, 此时有 $f(r) \leq f(r_n) \leq L_1 < L - \delta$; 同理可得 $\forall s \in \mathbb{Q}$ 且 $s > x$, $f(s) > L + \delta$; 若 $x \in \mathbb{Q}$, 亦有 $f(x) \notin (L - \delta, L + \delta)$ 。故 $(L - \delta, L + \delta)$ 没有 $f(\mathbb{Q})$ 的任何元素, 这与 $f(\mathbb{Q})$ 在 \mathbb{R} 中稠密矛盾。因此 $L_1 = L_2 = L$; 若 $x \in \mathbb{Q}$, 则 $L = f(x)$ 。

$\forall \varepsilon > 0$, 由于 $f(\mathbb{Q})$ 在 \mathbb{R} 中稠密, 故 $\exists r_0, s_0 \in \mathbb{Q}$ 使得 $L - \varepsilon < f(r_0) < L < f(s_0) < L + \varepsilon$ 。由于 f 单调不减, 故 $r_0 < x < s_0$ 。令 $\delta = \min\{s_0 - x, x - r_0\}$, 则 $\forall r \in \mathbb{Q}$ 且 $|r - x| < \delta$, 都有 $r_0 < r < s_0$, 因此

$$L - \varepsilon < f(r_0) \leq f(r) \leq f(s_0) < L + \varepsilon \quad (1.4.31)$$

故 $g(x) = \lim_{r \rightarrow x} f(r)$ 存在, 且当 $x \in \mathbb{Q}$ 时, $g(x) = f(x)$ 。

(3) 设 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $x < y$, 类似 (1) 可取 $x < r_1 = s_1 < y$, $\{r_n\}$ 严格减且趋于 x , $\{s_n\}$ 严格增且趋于 y , 则

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) \leq f(r_1) = f(s_1) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = g(y) \quad (1.4.32)$$

若 f 严格增, 只需将上式中的不严格不等号改为严格不等号即可。

(4) 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, 由 (1) 可知 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall t \in \mathbb{Q}$ 且 $|t - x_0| < \delta$, 都有 $|f(t) - g(x_0)| < \varepsilon$ 。 $\forall x \in \mathbb{R}$ 且 $|x - x_0| < \delta$, $\exists r, s \in \mathbb{Q}$ 使得 $x_0 - \delta < r < x < s < x_0 + \delta$ 。由于 g 单调不减, 故

$$-\varepsilon < f(r) - g(x_0) = g(r) - g(x_0) \leq g(x) - g(x_0) \leq g(s) - g(x_0) = f(s) - g(x_0) < \varepsilon \quad (1.4.33)$$

这说明 g 在 x_0 处连续。由于 x_0 是任意选取的, 故 g 在 \mathbb{R} 上连续。 \square

例 1.4.7 (习题 2.1.8, 作业第 6 题)

Cauchy 方程。设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (1.4.34)$$

证明或否定以下结论:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = f(1)n$ 。

(2) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = f(1)n$ 。

- (3) $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = f(1)x$.
- (4) 若 f 连续, 则 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1)x$.
- (5) 若 f 单调, 则 f 连续.
- (6) 若 f 在一点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处连续, 则 f 连续.
- (7) 若 f 至多只有第一类间断点, 则 f 连续.
- (8) 若 f 局部有界 (即 $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \exists \delta, M > 0$ 使得 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies |f(x)| \leq M$), 则 f 连续.
- (9) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1)x$.

证明 (1) 易见 $f(0) = 0$ 。借助数学归纳法可证明

$$f(nx) = nf(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \quad (1.4.35)$$

因此 $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = f(1)n$ 。

(2) 令 $y = -x$ 可得 $f(-x) = -f(x)$, 故 f 为奇函数。因此 $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = f(1)n$ 。

(3) $\forall x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, 有 $f(m) = f(nx) = nf(x)$, 故 $f(x) = \frac{1}{n}f(m) = \frac{m}{n}f(1) = f(1)x$ 。

(4) 若 f 连续, 任取 $x_0 \in \mathbb{R}$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (1.4.36)$$

令 $\delta' = \min\{\delta, \varepsilon\}$, 由有理数的稠密性知 $\exists r \in \mathbb{Q}$ 满足 $x_0 - \delta' < r < x_0 + \delta'$, 则有

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(1)x_0| &= |f(x_0) - f(r) - f(1)(x_0 - r)| \leq |f(x_0) - f(r)| + |f(1)||x_0 - r| \\ &< \varepsilon + |f(1)|\delta' \leq (1 + |f(1)|)\varepsilon \stackrel{?}{<} \varepsilon' \end{aligned} \quad (1.4.37)$$

取 $\varepsilon' = \varepsilon(1 + |f(1)|)$ 即可。因此, 任取 $x_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon' > 0$ 都有

$$|f(x_0) - f(1)x_0| < (|f(1)| + 1)\varepsilon = \varepsilon' \implies f(x_0) = f(1)x_0 \quad (1.4.38)$$

(5) 若 f 单调, 不妨设 f 单调不减, 此时 $f(1) \geq 0$ 。任取 $x_0 \in \mathbb{R}$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 取特定 $\delta > 0$, 由有理数的稠密性知 $\exists r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ 满足 $x_0 - \delta < r_1 < x_0 < r_2 < x_0 + \delta$, 则有

$$f(x_0) - \varepsilon \stackrel{?}{<} f(1)r_1 \leq f(x_0) \leq f(1)r_2 \stackrel{?}{<} f(x_0) + \varepsilon \quad (1.4.39)$$

若 $f(1) = 0$, 则 $f(x_0) = 0$ 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$ 恒成立, 此时 f 连续; 若 $f(1) > 0$, 则有

$$\begin{aligned} f(1)r_2 &< f(1)(r_1 + x_0 - r_1 + \delta) < f(r_1) + 2\delta f(1) \leq f(x_0) + 2\delta f(1) = f(x_0) + \varepsilon \\ f(1)r_1 &> f(1)(r_2 + x_0 - r_2 - \delta) > f(r_2) - 2\delta f(1) \geq f(x_0) - 2\delta f(1) = f(x_0) - \varepsilon \end{aligned} \quad (1.4.40)$$

取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2f(1)}$ 即可。

(6) 若 f 在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处连续, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (1.4.41)$$

任取 $x_1 \in \mathbb{R}$, 则有

$$|x - x_1| < \delta \implies |f(x) - f(x_1)| = |f(x_0 + x - x_1) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (1.4.42)$$

故 f 在 x_1 处连续。

(7) 若 f 至多只有第一类间断点, 则 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 均存在。类似 (4) 可证明 $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(1)x_0$, 因此 f 连续。

(8) 若 f 局部有界, 取 $x_0 = 0$, 则 $\exists \delta_0, M_0 > 0$ 使得 $|x| < \delta_0 \implies |f(x)| \leq M_0$ 。 $\forall x \in \mathbb{R}$, 由有理数的稠密性知 $\exists r \in \mathbb{Q}$ 满足 $x - \delta_0 < r < x + \delta_0$, 则有

$$f(x) - f(1)x = f(r + x - r) - f(1)(r + x - r) = f(x - r) - f(1)(x - r) \quad (1.4.43)$$

由于 $|x - r| < \delta_0$, 故有

$$|f(x) - f(1)x| \leq |f(x - r)| + |f(1)||x - r| \leq M_0 + |f(1)|\delta_0 =: M \quad (1.4.44)$$

因此 $\forall \varepsilon > 0$, 可选择充分大的 n 使得 $\frac{M}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, 则 $\exists \delta > 0$ 使得

$$|x| < \delta \implies |f(x)| = \frac{|f(2^n x)|}{2^n} \leq \frac{|f(1) \cdot 2^n x| + M}{2^n} \leq |f(1)|\delta + \frac{\varepsilon}{2} \leq (1 + |f(1)|)\delta + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (1.4.45)$$

取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2(1+|f(1)|)}$ 即可。因此 f 在 $x_0 = 0$ 处连续, 结合 (6) 可知 f 连续。

(9) 命题是错误的。将 \mathbb{R} 看作 \mathbb{Q} 上的向量空间, 取 $\{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 为其中一组基 (称为 Hamel 基, I 称为指标集, 由选择公理保证), 其函数值 $f(x_\alpha)$ 可任意给定。将 f 线性扩充到 \mathbb{R} 上, 根据基的定义, $\forall x \in \mathbb{R}$, x 可唯一表示为有限个基向量的线性组合, 即 $x = \sum_{\alpha \in I} q_\alpha x_\alpha$, 其中 $q_\alpha \in \mathbb{Q}$ 。因此 $f(x) = \sum_{\alpha \in I} q_\alpha f(x_\alpha)$ 。

显然 f 满足 Cauchy 方程, 并且只要有一个基向量 x_α 的函数值不为 $f(1)x_\alpha$, 则 f 在该向量处不连续, 从而在 \mathbb{R} 上处处不连续。 \square

注¹ 实际上, 我们有

- 单调 \implies 局部有界: 取 $M = \max\{|f(x_0 + \delta)|, |f(x_0 - \delta)|\}$ 即可。
- 至多只有第一类间断点 \implies 局部有界: 令 $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$ 使得 $|f(x) - f(x_0^-)| < 1$ 或 $|f(x) - f(x_0^+)| < 1$, 取 $M = \max\{|f(x_0)|, |f(x_0^-)| + 1, |f(x_0^+)| + 1\}$ 即可。

注² 选择公理是一个很神奇的公理，它等价于 Zorn 引理、良序定理等。选择公理看起来“十分正确”，但是其等价结论良序定理却看起来“十分错误”，因此它也成为数学史上一个颇有争议的话题。

我们可以利用选择公理证明下面这个看起来很反直觉的命题： $y = x$ 可以表示为两个周期函数之和。

将实数集划分为若干等价类，两个实数 x_1, x_2 属于同一个等价类当且仅当存在整数 m, n 使得 $x_1 - x_2 = m + n\sqrt{2}$ 。由选择公理可知每个等价类中都可以选出一个代表元，记为 x_α ，其中 α 属于某个指标集 I 。则任意实数 x 都可以唯一表示为 $x = x_\alpha + m + n\sqrt{2}$ ，其中 $m, n \in \mathbb{Z}$ 。

令 $f(x) = \frac{1}{2}x_\alpha + m$ 、 $g(x) = \frac{1}{2}x_\alpha + n\sqrt{2}$ ，则 f, g 分别以 $\sqrt{2}, 1$ 为周期，且 $f(x) + g(x) = x$ 。

例 1.4.8

中点凸。设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足中点凸条件：

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1.4.46)$$

证明：

(1) 对任意有理数 $t \in [0, 1]$ 以及任意 $x, y \in \mathbb{R}$ ，都有

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad (1.4.47)$$

(2) 若 f 连续，则对任意实数 $t \in [0, 1]$ 以及任意 $x, y \in \mathbb{R}$ 都成立 (1) 中的不等式。

(3) 若 f 连续，则对满足 $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$ 的任意非负实数 t_1, t_2, \cdots, t_n 以及任意 x_1, x_2, \cdots, x_n 都有

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n) \quad (1.4.48)$$

(4) 若 f 单调，则 f 连续。

(5) 若 f 局部有界，则 f 连续。

(6) 若 f 至多只有第一类间断点，则 f 连续。

(7) 存在中点凸函数 f 不满足 (2) 中的不等式。

证明 下证 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ，成立

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}, \quad \forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \quad (1.4.49)$$

若 $n = 2^k$, 采用数学归纳法容易证明结论成立。若 n 不为 2 的幂, 则 $\exists k \in \mathbb{N}$ 使得 $2^k < n < 2^{k+1}$ 。选择 $x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{2^{k+1}} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, 则

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) &= f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}} \\ &= \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{2^{k+1}} + \frac{2^{k+1} - n}{2^{k+1}} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \end{aligned} \quad (1.4.50)$$

化简可得结论成立。

(1) 设 $t = \frac{m}{n}$, 其中 $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$, 则

$$f((1-t)x + ty) = f\left(\frac{(n-m)x + my}{n}\right) \leq \frac{(n-m)f(x) + mf(y)}{n} = (1-t)f(x) + tf(y) \quad (1.4.51)$$

(2) 设 $x \neq y$ 。由 f 的连续性可知 $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $|x - x_0| < \delta \implies |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ 。令 $\delta' = \min\{\delta, \varepsilon\}$ 、 $x_0 = (1-t)x + ty$, 给定有理数 r , 注意到

$$f((1-r)x + ry) = f((1-t)x + ty + (t-r)(x-y)) = f(x_0 + (t-r)(x-y)) \quad (1.4.52)$$

故可取 $|r-t||x-y| < \delta'$, 即 $r \in \left(t - \frac{\delta'}{|y-x|}, t + \frac{\delta'}{|y-x|}\right)$, 由有理数的稠密性知这可以取到, 此时有

$$|f((1-r)x + ry) - f((1-t)x + ty)| < \varepsilon \quad (1.4.53)$$

因此

$$\begin{aligned} f((1-t)x + ty) &< f((1-r)x + ry) + \varepsilon \leq (1-r)f(x) + rf(y) + \varepsilon \\ &= (1-t)f(x) + tf(y) + (t-r)(f(y) - f(x)) + \varepsilon \\ &\leq (1-t)f(x) + tf(y) + \delta' \left| \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \right| + \varepsilon \\ &\leq (1-t)f(x) + tf(y) + \varepsilon \left[\left| \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \right| + 1 \right] \stackrel{?}{<} (1-t)f(x) + tf(y) + \varepsilon' \end{aligned} \quad (1.4.54)$$

故 $\forall \varepsilon' > 0$, 选择 $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{1 + \left| \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \right|}$, $\exists \delta > 0$ 使得

$$f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y) + \varepsilon' \quad (1.4.55)$$

因此

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad (1.4.56)$$

(3) 借助数学归纳法, $n = 2$ 的情形已在 (2) 中证明。假设结论对 n 成立, 现下证对 $n+1$ 也成立。不妨设 $t_{n+1} < 1$, 则 $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1 - t_{n+1}$ 。由归纳假设可知

$$f\left(\frac{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n}{1 - t_{n+1}}\right) \leq \frac{t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n)}{1 - t_{n+1}} \quad (1.4.57)$$

因此

$$\begin{aligned} f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_{n+1}x_{n+1}) &= f\left((1-t_{n+1})\frac{t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n}{1-t_{n+1}} + t_{n+1}x_{n+1}\right) \\ &\leq (1-t_{n+1})f\left(\frac{t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n}{1-t_{n+1}}\right) + t_{n+1}f(x_{n+1}) \\ &\leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n) + t_{n+1}f(x_{n+1}) \end{aligned} \quad (1.4.58)$$

故结论成立。

(4)(5)(6) 由于 f 局部有界是 f 单调和 f 至多只有第一类间断点的推论, 故这里我们只证明 (5)。利用中点凸函数的性质容易推出以下不等式:

- 三点不等式 (取 $x-h$ 与 $x+h$ 的中点 x): $f(x) \leq \frac{1}{2}[f(x-h) + f(x+h)]$ 。
- 倍增不等式 (取 x 与 $x+2h$ 的中点 $x+h$): $f(x+2h) \geq 2f(x+h) - f(x)$ 。

利用倍增不等式、结合数学归纳法可证明:

$$f(x+2^n h) \geq 2^n f(x+h) - (2^n - 1)f(x), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.4.59)$$

固定 $x_0 \in \mathbb{R}$, 由局部有界性, $\exists \delta_0, M > 0$ 使得 $|x - x_0| < \delta_0 \implies |f(x)| \leq M$ 。取正整数 N 使得

$$f(x_0) + 2^N \varepsilon > M \iff N > \log_2 \frac{M - f(x_0)}{\varepsilon} \quad (1.4.60)$$

取 $\delta = \frac{\delta_0}{2^N}$, 我们先证明 f 上半连续。 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 记 $h = x - x_0 \in (-\delta, \delta)$, 由倍增不等式的推论可得

$$M \geq f(x_0 + 2^N h) \geq 2^N f(x_0 + h) - (2^N - 1)f(x_0) \implies f(x_0 + h) \leq f(x_0) + \frac{M - f(x_0)}{2^N} < f(x_0) + \varepsilon \quad (1.4.61)$$

再证明 f 下半连续。取 x 关于 x_0 的对称点 $x' = 2x_0 - x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 由三点不等式可得

$$f(x_0) \leq \frac{f(x) + f(x')}{2} < \frac{f(x) + f(x_0) + \varepsilon}{2} \implies f(x) > f(x_0) - \varepsilon \quad (1.4.62)$$

故 f 在 x_0 处连续。由于 x_0 是任意选取的, 故 f 在 \mathbb{R} 上连续。

(7) 令 f 为 Cauchy 方程的非线性解, 则

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (1.4.63)$$

故 f 为中点凸函数。对于 (2) 中的不等式, 令 $x = 0, y = 1, t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 选择 Hamel 基使得 $f(t) \neq f(1)t$ 即可。
□

1.5 补充习题

1.5.1 确界

除了一些基本概念以外, 确界这部分内容中最重要的就是确界公理。

定理 1.5.1 (确界公理)

任何非空有上(下)界的实数子集必有上(下)确界。

例 1.5.2 (阿基米德性质)

对任意正数 ε , 存在正整数 n 使得 $\frac{1}{n} < \varepsilon < n$ 。

证明 提示: 考虑集合

$$A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 1 + \varepsilon\} \quad (1.5.1)$$

A 非空有上界, 故必有上确界 n_0 , 则 $n_0 - 1$ 不是 A 的上界。故存在 $m \in A$, 使得 $n_0 - 1 < m$, 即 $m + 1 > n_0$ 且 $m + 1$ 是正整数。所以 $m + 1 \notin A$, 因此 $m + 1 > 1 + \varepsilon$, 即 $m > \varepsilon$ 。

同理可证存在正整数 m' 使得 $m' > \frac{1}{\varepsilon}$ 。

取 $n = m + m'$ 即可。 □

例 1.5.3

设 $a > 1, \varepsilon > 0$ 。证明存在正整数 m 使得 $a^{-m} < \varepsilon < a^m$ 。

证明 提示:

$$a^m = (1 + (a - 1))^m \geq 1 + m(a - 1) > m(a - 1) \stackrel{?}{>} \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.5.2)$$

□

例 1.5.4

证明: 实数 α 是实数子集的上确界当且仅当

- 任何比 α 小的有理数都不是 A 的上界。
- 任何比 α 大的有理数都是 A 的上界。

证明 提示: 必要性 (\implies) 显然。下证充分性 (\impliedby), 核心思想是反证法。

首先证明 α 是上界。假设 α 不是 A 的上界, 则存在实数 $x \in A$ 使得 $x > \alpha$ 。由有理数的稠密性(定理 1.4.13), 存在有理数 r 使得 $\alpha < r < x$ 。根据题设条件, r 是 A 的上界, 矛盾。

其次证明 α 是上确界。假设 α 不是 A 的上确界, 则存在实数 $\beta < \alpha$ 是 A 的上界。由有理数的稠密性, 存在有理数 r 使得 $\beta < r < \alpha$ 。根据题设条件, r 不是 A 的上界, 矛盾。 □

另证 $\forall x > \alpha$, 由有理数的稠密性, $\exists r \in (\alpha, x)$ 是 A 的上界, 故 x 是 A 的上界; 同理可证 $\forall x < \alpha$, x 都不是 A 的上界。

设 A 的上界集为 U , 则 $(\alpha, +\infty) \subseteq U \subseteq [\alpha, +\infty)$, 故 $U = (\alpha, +\infty)$ 或 $U = [\alpha, +\infty)$ 。根据确界公理, U 有最小值, 故 $U = [\alpha, +\infty)$, 即 α 是 A 的上确界。 \square

例 1.5.5

设 A, B 是非空有上界的实数子集, 且存在 $a_0, b_0 > 0$ 满足 $a_0 \in A, b_0 \in B$ 。记

$$AB = \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a, b > 0 \text{ s.t. } a \in A, b \in B, c \leq ab\} \quad (1.5.3)$$

证明 AB 非空有上界, 且 $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$ 。

证明 提示: 上(下)确界的另一种表述: 若 α 是 A 的上界, 且对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $a \in A$ 使得 $\alpha - \varepsilon < a \leq \alpha$, 则 α 是 A 的上确界。

AB 非空有上界显然, 且 $\sup A \cdot \sup B$ 显然是 AB 的上界。下证 $\sup A \cdot \sup B$ 是 AB 的上确界。

对任意 $\varepsilon > 0$, 取特定 $\varepsilon' > 0$, 存在 $a \in A$ 满足 $\sup A - \varepsilon' < a \leq \sup A$, 存在 $b \in B$ 满足 $\sup B - \varepsilon' < b \leq \sup B$, 则 $c = ab \in AB$, 且

$$\begin{aligned} \sup A \cdot \sup B &\geq c > (\sup A - \varepsilon')(\sup B - \varepsilon') > \sup A \cdot \sup B - \varepsilon'(\sup A + \sup B) \\ &= \sup A \cdot \sup B - \varepsilon \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

取 $\varepsilon' = \varepsilon / (\sup A + \sup B)$ 即可。

我们证明了对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $c \in AB$ 满足 $\sup A \cdot \sup B - \varepsilon < c \leq \sup A \cdot \sup B$, 即 $\sup A \cdot \sup B$ 是 AB 的上确界。 \square

1.5.2 关于乘方、开方、幂指对函数

例 1.5.6

设 n 是正整数。证明函数 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^n$ 是严格增满射。

证明 首先证明 f 是严格增的。常见误证 (涉及循环论证):

$$x_2 > x_1 \implies \frac{x_2^n}{x_1^n} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n \stackrel{?}{>} 1 \quad (1.5.5)$$

参考证明 1 (直接相减):

$$x_2 > x_1 \implies x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \cdots + x_1^{n-1}) > 0 \quad (1.5.6)$$

参考证明 2 (对 n 作数学归纳法):

$$x_2 > x_1 \implies x_2^n - x_1^n = x_2(x_2^{n-1} - x_1^{n-1}) + x_1^{n-1}(x_2 - x_1) > 0 \quad (1.5.7)$$

下证 f 是满射, 其实就是证明 $\sqrt[n]{x}(x > 0)$ 的存在性. 提示: 联想讲义 例 1.4.7 中利用 Dekekind 分割证明 $\sqrt{2}$ 的存在性, 能否采用类似的方法?

令 $A = \{y \in \mathbb{R} \mid y^n < x\}$, 其中 $x > 0$. 首先 $0 \in A$, x 是 A 的上界 (利用严格增), 故 A 非空有上界, 故存在上确界 α . 下证 $\alpha^n = x$.

若 $\alpha^n > x$, 则取 $\varepsilon > 0$, 尝试

$$[\alpha(1 - \varepsilon)]^n > \alpha^n(1 - n\varepsilon) \stackrel{?}{\geq} x \quad (1.5.8)$$

取

$$\varepsilon = \frac{\alpha^n - x}{n\alpha^n} \quad (1.5.9)$$

则 α 不是最小上界, 矛盾.

若 $\alpha^n < x$, 则取 $\varepsilon > 0$, 尝试

$$[\alpha(1 + \varepsilon)]^n < \left(\frac{\alpha}{1 - \varepsilon}\right)^n < \frac{\alpha^n}{1 - n\varepsilon} \stackrel{?}{\leq} x \quad (1.5.10)$$

取

$$\varepsilon = \frac{x - \alpha^n}{n\alpha^n} \quad (1.5.11)$$

则 α 不是上界, 矛盾.

综上, $\alpha^n = x$, 即 f 是满射. □

例 1.5.7

设 $a > 1$, $x > 0$, 记

$$A_x = \left\{ \frac{m}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{Z}, a^m \leq x^n \right\} \quad (1.5.12)$$

证明:

- (1) A_x 非空有上界. 记 $\log_a x = \sup A_x$.
- (2) 对任意正数 x, y , $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, 并且 $\log_a a = 1$.
- (3) 对任何有理数 r 和正数 x , $\log_a x^r = r \log_a x$.
- (4) $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 是严格增满射.

提示:

引理 1.5.8

若 $x^q \leq a^p$, 则 $\frac{p}{q}$ 是 A_x 的上界.

证明 对任意 $\frac{m}{n} \in A_x$, 有

$$a^{mq} = (a^m)^q \leq (x^n)^q = (x^q)^n \leq (a^p)^n = a^{pn} \quad (1.5.13)$$

所以 $mq \leq pn$, 即 $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$. □

注 当 $0 < a < 1$ 时, 上述结论 (2)(3) 同样成立, 此时 $\log_a x$ 是严格减满射, 证明类似。

证明 (1) 令 $n = 1$, 由阿基米德性质可知存在正整数 m 使得 $a^{-m} < x < a^m$. 因此 $-m \in A_x$, 且 m 是 A_x 的上界。故 A_x 非空有上界。

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$, 取特定 $n \in \mathbb{N}^*$, 则存在 $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ (为什么?) 使得

$$a^{m_1} \leq x^n < a^{m_1+1}, \quad a^{m_2} \leq y^n < a^{m_2+1} \quad (1.5.14)$$

所以 $\frac{m_1}{n} \in A_x$, $\frac{m_2}{n} \in A_y$, 并且 $\frac{m_1+1}{n}$ 是 A_x 的上界、 $\frac{m_2+1}{n}$ 是 A_y 的上界, 从而

$$\frac{m_1+1}{n} \geq \log_a x, \quad \frac{m_2+1}{n} \geq \log_a y \quad (1.5.15)$$

另一方面,

$$a^{m_1+m_2} \leq (xy)^n < a^{m_1+m_2+2} \quad (1.5.16)$$

所以 $\frac{m_1+m_2}{n} \in A_{xy}$, 并且 $\frac{m_1+m_2+2}{n}$ 是 A_{xy} 的上界, 因此

$$\begin{aligned} \log_a x + \log_a y - \frac{2}{n} &\leq \frac{m_1+1}{n} + \frac{m_2+1}{n} - \frac{2}{n} \leq \log_a(xy) \\ &\leq \frac{m_1+m_2+2}{n} = \log_a x + \log_a y + \frac{2}{n} \end{aligned} \quad (1.5.17)$$

于是

$$|\log_a(xy) - \log_a x - \log_a y| \leq \frac{2}{n} < \varepsilon \quad (1.5.18)$$

取 $n > \frac{2}{\varepsilon}$ 即可。从而

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (1.5.19)$$

依据单调性, 我们很容易得到 $\log_a a = 1$ 。

(3) 由数学归纳法易知, 证明类似于: 已知 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f(x+y) = f(x)+f(y)$, 则 $\forall r \in \mathbb{Q}, f(rx) = rf(x)$ 。

(4) 先证 f 严格增。设 $0 < x < y$, 尝试

$$\frac{y^n}{x^n} = \left(1 + \frac{y-x}{x}\right)^n \geq 1 + \frac{n(y-x)}{x} > a^2 \quad (1.5.20)$$

取 $n > \frac{a^2 x}{y-x}$ 即可。再取整数 m_1 使得

$$a^{m_1} \leq x^n < a^{m_1+1} \quad (1.5.21)$$

则

$$a^{m_1} \leq x^n < a^{m_1+1} < a^2 a^{m_1} \leq a^2 x^n < y^n \quad (1.5.22)$$

故 $\frac{m_1+1}{n}$ 是 A_x 的上界, $\frac{m_1+2}{n} \in A_y$, 所以

$$\log_a x < \frac{m_1+1}{n} < \frac{m_1+2}{n} \leq \log_a y \quad (1.5.23)$$

下证 \log_a 是满射, 即 $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x > 0$ 使得 $\log_a x = y$. 记

$$B_y = \left\{ a^{\frac{m}{n}} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*, \frac{m}{n} \leq y \right\} \quad (1.5.24)$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists m \in \mathbb{N}^*$ 使得

$$\frac{m}{n} \leq y < \frac{m+1}{n} \quad (1.5.25)$$

于是 $a^{\frac{m}{n}} \in B_y$, 且 $a^{\frac{m+1}{n}}$ 是 B_y 的上界, 故 B_y 有上确界 x . 因此

$$\frac{m}{n} = \log_a a^{\frac{m}{n}} \leq \log_a x \leq \log_a a^{\frac{m+1}{n}} = \frac{m+1}{n} \quad (1.5.26)$$

联立以上两式可得

$$|\log_a x - y| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \quad (1.5.27)$$

取 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 即可. 故 $\log_a x = y$, 即 \log_a 是满射. \square

指数函数 $a^x (a > 0, a \neq 1)$ 定义为对数函数 \log_a 的反函数 ($1^x := 1$), 故指数函数是 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 的严格增满射. 幂函数可定义为 $x^\mu := 2^{\mu \log_2 x}$, 其中 $\mu \in \mathbb{R}$. 至此, 我们已给出基本初等函数中除 (反) 三角函数以外的所有函数, 它们之间的关系如图 1.5.1 所示.

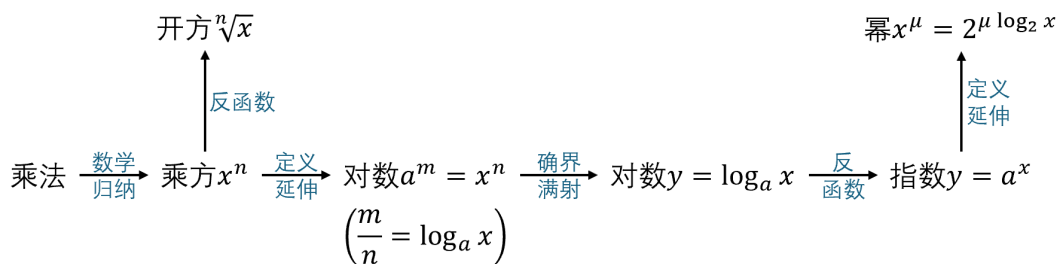


图 1.5.1: 幂指对函数关系图

例 1.5.9

设 $a, b > 0$ 且 $x, y \in \mathbb{R}$, 证明:

(1) $a^x a^y = a^{x+y}$.

(2) $(a^x)^y = a^{xy}$.

(3) $a^x b^x = (ab)^x$.

提示:

引理 1.5.10

$$\forall a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, \forall b > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \log_a b^x = x \log_a b.$$

证明 由上题 (3) 可知引理对 $x \in \mathbb{Q}$ 成立。当 $b = 1$ 时, 引理显然成立。当 $a > 1, b > 1$ 时, 由于 \log_a, \log_b 严格增, 故 $\log_a b^x$ 严格增。 $\forall \varepsilon > 0$, 尝试取 $\varepsilon' > 0$, 根据有理数的稠密性, 取 r_1, r_2 满足 $x - \varepsilon' < r_1 < x < r_2 < x + \varepsilon'$, 则

$$r_1 \log_a b = \log_a b^{r_1} < \log_a b^x < \log_a b^{r_2} = r_2 \log_a b \quad (1.5.28)$$

因此

$$|\log_a b^x - x \log_a b| < \varepsilon' \log_a b \stackrel{?}{\leq} \varepsilon \quad (1.5.29)$$

取 $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\log_a b}$ 即可。其余情况同理可证。 \square

证明 (1) 由 \log_a 以及反函数的性质可得

$$\log_a (a^x a^y) = \log_a a^x + \log_a a^y = x + y = \log_a a^{x+y} \quad (1.5.30)$$

故 $a^x a^y = a^{x+y}$ 。

(2) 由 \log_a 以及引理可得

$$\log_a (a^x)^y = y \log_a a^x = xy = \log_a a^{xy} \quad (1.5.31)$$

故 $(a^x)^y = a^{xy}$ 。

(3) 由 \log_a 以及引理可得

$$\log_a (a^x b^x) = \log_a a^x + \log_a b^x = x(1 + \log_a b) = x \log_a ab = \log_a (ab)^x \quad (1.5.32)$$

故 $a^x b^x = (ab)^x$ 。 \square

1.5.3 连续与函数在一点处的极限

例 1.5.11

讨论函数 $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x}$ 的连续性和间断点。

解 f 的定义域为 $I = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ 。根据连续函数的四则运算性质知多项式和有理分式都是连续函数, 故 f 在 I 上连续。

$x = 0$ 和 $x = 1$ 都是定义域的聚点。当 $x \rightarrow 0$ 时, 取 $x = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}^*)$, 则有

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{3}{n} + 2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}} = \frac{1 - 3n + 2n^2}{1 - n} = -2n + 1 \quad (1.5.33)$$

无下界, 所以右极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 不存在, $x = 0$ 是 f 的第二类间断点。

当 $x \rightarrow 1$ 时, 对 f 进行因式分解并化简可得

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)} = \frac{x-2}{x}, \quad x \in I \quad (1.5.34)$$

后者在 $x = 1$ 处连续, $x = 1$ 是 f 的可去间断点, 且

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x} = -1 \quad (1.5.35)$$

□

例 1.5.12

设 f_1, f_2, \dots, f_n 是 I 上的连续函数, 证明

$$g(x) := \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}, \quad x \in I \quad (1.5.36)$$

也是 I 上的连续函数。

证明 解法一: 对 n 进行归纳, 注意到

$$\max\{f_1, \dots, f_{n-1}, f_n\} = \max\{\max\{f_1, \dots, f_{n-1}\}, f_n\} \quad (1.5.37)$$

且 \max 函数可转写成连续函数的线性组合和复合, 即

$$\max\{f_1(x), f_2(x)\} = \frac{f_1(x) + f_2(x) + |f_1(x) - f_2(x)|}{2} \quad (1.5.38)$$

解法二: 采用定义。 $\forall \varepsilon > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n, \exists \delta_i > 0$ 使得

$$x \in I \wedge |x - x_0| < \delta_i \implies |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon \quad (1.5.39)$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\} > 0$, 则

$$\begin{aligned} g(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\} &< \max\{f_1(x_0) + \varepsilon, \dots, f_n(x_0) + \varepsilon\} = g(x_0) + \varepsilon \\ g(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\} &> \max\{f_1(x_0) - \varepsilon, \dots, f_n(x_0) - \varepsilon\} = g(x_0) - \varepsilon \end{aligned} \quad (1.5.40)$$

即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } x \in I \wedge |x - x_0| < \delta \implies |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \quad (1.5.41)$$

因此 g 在 $x_0 \in I$ 处连续。 □

注 常见错误: 虽然对每个 x , $\max\{f_1(x), f_2(x)\}$ 必为 $f_1(x), f_2(x)$ 之一, 但不能据此得到对 x_0 附近的所有 x , $\max\{f_1(x), f_2(x)\}$ 都等于 $f_1(x)$ 或都等于 $f_2(x)$, 如

$$f_1(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = -f_1(x) \quad (1.5.42)$$

例 1.5.13

设 $f: (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$ 是单调满射, 则 f 是连续函数。若 f 是严格单调满射, 则 f^{-1} 也是连续函数。

证明 采用定义证明。不妨设 f 单调不减, $\forall x_0 \in (a, b), \forall \varepsilon > 0$, 由于 f 是单调不减满射, 故 $\exists x_1 \in (a, x_0), x_2 \in (x_0, b)$ 满足

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x_1) \leq f(x_0) \leq f(x_2) \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x_0) + \varepsilon \quad (1.5.43)$$

取 $\delta = \min\{x_0 - x_1, x_2 - x_0\} > 0$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得

$$x \in (a, b) \wedge |x - x_0| < \delta \implies f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad (1.5.44)$$

因此 f 在 x_0 处连续。

若 f 是严格单调满射, 则 f^{-1} 也是单调满射, 故 f^{-1} 在 (α, β) 上连续。□

例 1.5.14

对任意 $\alpha > 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$ 。

证明 本题的难点在于对实数次幂的处理。定义

$$x^\alpha := 2^{\alpha \log_2 x} \quad (1.5.45)$$

不妨设 $x \in (0, 1)$ 。根据阿基米德性质, 任取 $m \in \mathbb{N}^*$ 满足 $\alpha > \frac{1}{m}$, 则

$$\log_2 x < \log_2 1 = 0 \implies \alpha \log_2 x < \frac{1}{m} \log_2 x \implies x^\alpha = 2^{\alpha \log_2 x} < 2^{\frac{1}{m} \log_2 x} = x^{\frac{1}{m}} \quad (1.5.46)$$

对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$, 取特定 $\delta > 0$, 则

$$x^{\frac{1}{m}} < \varepsilon \iff x < \varepsilon \quad (1.5.47)$$

因此 $\delta = \varepsilon^m$, 此时

$$0 < x^\alpha < x^{\frac{1}{m}} < \varepsilon \quad (1.5.48)$$

□

1.5.4 函数在无穷远处的极限、数列极限

例 1.5.15

设 $a_n > 0$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in [0, +\infty]$, 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$, 并利用该结论证明:

(1) 设 $a > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a}$.

(2) 设 $a_n > 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

(3) 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

(4) 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}}$

解 由极限定义可得取任意 $A_1 < A_3 < A < A_4 < A_2$ (若 $A = 0$, 则只需取 A_4, A_2 ; 若 $A = +\infty$, 则只需取 A_1, A_3), $\exists N > 0$ 使得

$$n > N \implies A_1 < A_3 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < A_4 < A_2 \quad (1.5.49)$$

因此

$$\begin{aligned} a_n &= a_N \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} < a_N A_4^{n-N} \stackrel{?}{<} A_2^n \\ &> a_N A_3^{n-N} \stackrel{?}{>} A_1^n \end{aligned} \quad (1.5.50)$$

此时有

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_2}{A_4}\right)^n &> n \left(\frac{A_2}{A_4} - 1\right) \stackrel{?}{>} \frac{a_N}{A_4^N} \implies n > \frac{a_N}{A_4^N \left(\frac{A_2}{A_4} - 1\right)} \\ \left(\frac{A_3}{A_1}\right)^n &> n \left(\frac{A_3}{A_1} - 1\right) \stackrel{?}{>} \frac{A_3^N}{a_N} \implies n > \frac{A_3^N}{a_N \left(\frac{A_3}{A_1} - 1\right)} \end{aligned} \quad (1.5.51)$$

综上所述, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $A - \varepsilon < A_1 < A_3 < A < A_4 < A_2 < A + \varepsilon$ 和 $N' > 0$ 满足

$$N' = \max \left\{ N, \frac{a_N}{A_4^N \left(\frac{A_2}{A_4} - 1\right)}, \frac{A_3^N}{a_N \left(\frac{A_3}{A_1} - 1\right)} \right\} \quad (1.5.52)$$

此时有

$$n > N' \implies A - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < A + \varepsilon \quad (1.5.53)$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = A \quad (1.5.54)$$

利用以上结论证明:

(1) 取 $a_n = a$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \quad (1.5.55)$$

(2) 取 $A_n = a_1 a_2 \cdots a_n$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{A_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = A \quad (1.5.56)$$

(3) 取 $a_n = \frac{1}{n!}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad (1.5.57)$$

(4) 取 $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{2n-1} = 1 \quad (1.5.58)$$

□

例 1.5.16

设 $a > 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0$ 。

解 令 $y = \log_a x$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{a^y} \quad (1.5.59)$$

故我们只需要研究第一个极限。

首先考虑数列极限 $x \in \mathbb{N}$ 。 $\forall \varepsilon > 0$, 取特定 $N \in \mathbb{N}$, 则有

$$\begin{aligned} n > N &\implies 0 < \frac{2n}{a^{2n}} < \frac{2n}{[1+n(a-1)]^2} < \frac{2n}{n^2(a-1)^2} = \frac{2}{n(a-1)^2} \stackrel{?}{<} \varepsilon \\ &\implies 0 < \frac{2n+1}{a^{2n+1}} = \frac{2n+1}{2na} \cdot \frac{2n}{a^{2n}} \stackrel{?}{<} \frac{2n}{a^{2n}} < \varepsilon \implies \frac{2n+1}{2na} < 1 \end{aligned} \quad (1.5.60)$$

取

$$N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon(a-1)^2} \right\rceil + \left\lceil \frac{1}{2(a-1)} \right\rceil + 1 \quad (1.5.61)$$

则

$$n > N \implies 0 < \frac{2n+1}{a^{2n+1}} < \frac{2n}{a^{2n}} < \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^n} = 0 \quad (1.5.62)$$

再考虑函数极限。 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得

$$n > N \implies 0 < \frac{n}{a^n} < \varepsilon \quad (1.5.63)$$

对任意 $x > N + 1$, 取 $n = [x]$, 则

$$0 < \frac{x}{a^x} < \frac{n+1}{a^n} \leq \frac{2n}{a^n} < 2\varepsilon \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{a^x} = 0 \quad (1.5.64)$$

□

例 1.5.17

求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$ 。

解 解法一: $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 取特定 $N \in \mathbb{N}$, 则

$$n > N \implies (1 + \varepsilon)^{2n} > (n\varepsilon)^2 \stackrel{?}{>} n \quad (1.5.65)$$

取 $N = \lceil \varepsilon^{-2} \rceil + 1$, 则

$$1 \leq \sqrt[n]{n} < (1 + \varepsilon)^2 < 1 + 3\varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad (1.5.66)$$

解法二: 注意到

$$\log_2 \sqrt[n]{n} = \frac{\log_2 n}{n} \rightarrow 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 2^0 = 1 \quad (1.5.67)$$

解法三: 利用例 1.5.15 的结论可设 $a_n = n$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad (1.5.68)$$

□

例 1.5.18

求

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \right) \quad (1.5.69)$$

解 令 $y = \frac{1}{x}$, 则

$$\begin{aligned} \text{Ans} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+2y} - \sqrt[3]{1-y}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+2y} - 1}{y} - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{1-y} - 1}{y} \\ &= 2 \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{(1+u)^{1/2} - 1}{u} + \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{(1+v)^{1/3} - 1}{v} = \frac{4}{3} \end{aligned} \quad (1.5.70)$$

□

例 1.5.19

用 Excel 计算数列 $\sqrt{10^{2n} + 10^n} - 10^n$ 和 $\frac{10^n}{\sqrt{10^{2n} + 10^n} + 10^n}$, 并观察它们的收敛情况。解释你在计算中看到的现象。

解 理论上, 二者都应该收敛到 $\frac{1}{2}$, 但 Excel 的计算结果显示第一个数列最终变成了零, 后一个数列收敛到 $\frac{1}{2}$ 。

$\sqrt{10^{2n} + 10^n}$ 和 10^n 之间的差远比它们本身要小得多, 计算机数据存储空间有限, 导致二者之间的区别最终无法体现。所以在用计算机进行数值计算时, 应避免出现大数减大数。 □

例 1.5.20

求 $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x + 1}$ 在 $x \rightarrow \pm\infty$ 时的渐近线。

解 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 + x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (y - 2x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x + 2}{x + 1} = -5\end{aligned}\quad (1.5.71)$$

所以渐近线为 $y = 2x - 5$ 。 \square

例 1.5.21

求 $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ 在 $x \rightarrow \pm\infty$ 时的渐近线。

解 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = -\frac{1}{2}\end{aligned}\quad (1.5.72)$$

所以 $y = x - \frac{1}{2}$ 是 $x \rightarrow +\infty$ 时的渐近线。同理可得 $y = -x + \frac{1}{2}$ 是 $x \rightarrow -\infty$ 时的渐近线。 \square

例 1.5.22

设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad (1.5.73)$$

且存在 α 使得对任意 n 都有 $a_n \geq \alpha n$ 。证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \inf \left\{ \frac{a_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad (1.5.74)$$

证明 记 $\beta = \inf \left\{ \frac{a_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ ，显然 β 存在。因此 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists M > 0$ 使得 $\beta \leq \frac{a_M}{M} < \beta + \varepsilon$ 。

取特定 $N \in \mathbb{N}$ ，则 $\forall n > N > M$ ，设 $n = kM + r$ (其中 $r \in \{1, 2, \dots, M\}$)，则

$$\beta \leq \frac{a_n}{n} = \frac{a_{kM+r}}{kM+r} \leq \frac{ka_M + a_r}{kM+r} \leq \frac{a_M}{M} + \frac{a_r}{n} < \beta + \varepsilon + \frac{\max\{|a_1|, \dots, |a_M|\}}{n} < \beta + 2\varepsilon \quad (1.5.75)$$

取

$$N = \left[\frac{\max\{|a_1|, \dots, |a_M|\}}{\varepsilon} \right] + M + 1 \quad (1.5.76)$$

则 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists N > 0$ 使得

$$n > N \implies \beta \leq \frac{a_n}{n} < \beta + 2\varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \beta \quad (1.5.77)$$

□

1.5.5 单调性与极限

例 1.5.23

设 f 是区间 I 上的单调函数。

- (1) 证明 f 在区间 I 内的间断点都是跳跃间断点。
- (2) 证明 f 至多只有可数个间断点。
- (3) 证明 f 连续当且仅当 $f(I)$ 是区间。
- (4) 若进一步, f 严格单调, $f(I)$ 是区间, 证明 f 有连续的反函数。

证明 不妨设 f 单调不减。

- (1) 对 I 的任何内点 x_0 , 记

$$A := \{f(x) \mid x \in I \wedge x < x_0\}, \quad B := \{f(x) \mid x \in I \wedge x > x_0\} \quad (1.5.78)$$

易见 $\alpha = \sup A$ 和 $\beta = \inf B$ 均存在, 且有 $\alpha \leq f(x_0) \leq \beta$ 。

$\forall \varepsilon > 0$, $\alpha - \varepsilon$ 都不是 A 的上界, 因此 $\exists x_1 \in I$ 且 $x_1 < x_0$ 满足 $f(x_1) > \alpha - \varepsilon$ 。由 f 的单调性可知 $\forall x \in I$, $x_1 < x < x_0 \implies \alpha - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq \alpha$ 。因此 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = x_0 - x_1 > 0$, 使得 $\forall x \in I$, $x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha$ 。

同理可知 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \beta$ 。

若 $\alpha = \beta$, 则 f 在 x_0 处连续; 否则, f 在 x_0 处跳跃间断。

(2) 设 f 的间断点集合为 $D \subseteq I$, $\mathcal{I} = \{(a, b) \mid a < b \wedge (a, b) \subseteq I\}$ 。令 $g: D \rightarrow \mathcal{I}$ 满足 $x \mapsto (f(x^-), f(x^+))$, $h: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{Q}$ 满足 $S \mapsto r \in S$ 。由实数的稠密性可知 h 是存在的。

设 $x_1, x_2 \in D$ 且满足 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1^-) < f(x_1^+) \leq f(x_2^-) < f(x_2^+)$, 故 $g(x_1) \cap g(x_2) = \emptyset$, 即 $(h \circ g)(x_1) < (h \circ g)(x_2)$ 。故 $h \circ g: D \rightarrow \mathbb{Q}$ 为单射, $\text{card } D \leq \text{card } \mathbb{Q} = \aleph_0$, 即 f 的间断点至多可数。

(3) 我们尝试证明其逆否命题: f 不连续当且仅当 $f(I)$ 不是区间。

必要性: 设 f 在 I 内的某点 x_0 处间断, 由 (1) 可知 f 在 x_0 处跳跃间断, 故 $(f(x_0^-), f(x_0^+))$ 中至多含有 $f(x_0)$ 一个元素, 即 $f(I)$ 不是区间。

充分性: 设 $f(I)$ 不是区间, 则 $\exists x_1, x_2 \in I, \exists y \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x_1) < y < f(x_2)$ 且 $y \notin f(I)$ 。易见 $x_1 < x_2$ 。令

$$I_1 := \{x \in I \mid f(x) < y\}, \quad I_2 := \{x \in I \mid f(x) > y\} \quad (1.5.79)$$

显然 $\xi_1 = \sup I_1$ 和 $\xi_2 = \inf I_2$ 、 $\alpha = \sup f(I_1)$ 和 $\beta = \inf f(I_2)$ 均存在, 且成立 $\xi_1 \leq \xi_2$ 以及 $\alpha \leq f(\xi_1) \leq f(\xi_2) \leq \beta$ 、 $\alpha \leq y \leq \beta$ 。

显然 $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ 。否则设 $\xi_1 < \xi_2$, $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$, 则 ξ 既是 I_1 的上界又是 I_2 的下界, 即 $f(\xi) \geq y \wedge f(\xi) \leq y \implies f(\xi) = y \in f(I)$, 与 $y \notin f(I)$ 矛盾。

同(1)理可知 $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = \alpha$ 、 $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = \beta$ 。显然 $\alpha < \beta$, 否则设 $\alpha = \beta$, 则 $y = f(\xi) \in I$, 与 $y \notin f(I)$ 矛盾。

ξ 即为 f 的间断点, 即 f 不连续。

(4) 由 f 严格单增知 $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ 存在, 且 f^{-1} 严格单增。注意到 $f^{-1}(f(I)) = I$ 也是区间, 由(3)知 f^{-1} 连续。□

注 区间的定义为: 称 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为区间, 如果 $\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, x < z < y \implies z \in I$ 。

例 1.5.24

设 $\{a_n\}$ 是数列

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{1}, -\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots \quad (1.5.80)$$

记

$$I_n(x) := \begin{cases} 1, & a_n \leq x \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.5.81)$$

对正整数 N , 记

$$f_N(x) := \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} I_n(x) \quad (1.5.82)$$

证明:

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$, 极限 $f(x) := \lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(x)$ 存在。

(2) f 在 \mathbb{R} 上严格增。

(3) f 在每个有理数处间断, 在每个无理数处连续。

证明 (1) $\forall x \in \mathbb{R}$, f_N 关于 N 单调不减, 且

$$f_N(x) \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} = 1 \quad (1.5.83)$$

即 f_N 关于 N 有上界, 由单调有界收敛定理知 $\{f_N\}$ 关于 N 的极限存在。

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 不妨设 $x < y$, 由于有理数稠密且 $\{a_n\} = \mathbb{Q}$, 故存在 N_1 使得 $x < a_{N_1} < y$, 因此 $\forall N > N_1$, 有

$$f_N(y) - f_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} (I_n(y) - I_n(x)) \geq \frac{1}{2^{N_1}} \quad (1.5.84)$$

令 $N \rightarrow +\infty$, 则有

$$f(y) - f(x) \geq \frac{1}{2^{N_1}} > 0 \quad (1.5.85)$$

即 f 在 \mathbb{R} 上严格增。

(3) $\forall x_0 = a_{N_1} \in \mathbb{Q}$, 取 $\varepsilon = 2^{-N_1-1} > 0$, 则 $\forall \delta > 0$, $\exists x$ 满足 $x_0 - \delta < x < x_0$ 。故 $\forall N > N_1$, 都有

$$f_N(x_0) - f_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} (I_n(x_0) - I_n(x)) \geq \frac{1}{2^{N_1}} \quad (1.5.86)$$

令 $N \rightarrow +\infty$, 则有

$$f(x_0) - f(x) \geq \frac{1}{2^{N_1}} > \varepsilon \quad (1.5.87)$$

即 f 在 x_0 处间断。

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall \varepsilon > 0$, 取特定 $\delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 都有

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} |I_n(x) - I_n(x_0)| \stackrel{?}{\leq} \sum_{n>N_1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{N_1}} \stackrel{?}{<} \varepsilon \quad (1.5.88)$$

上述第一个“?”可以通过下式满足:

$$|x - x_0| < \delta \wedge n \leq N_1 \implies I_n(x) = I_n(x_0) \implies a_n \notin (\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\}) \quad (1.5.89)$$

若给定 N_1 , 取

$$\delta = \frac{1}{2} \min_{1 \leq n \leq N_1} |a_n - x_0| \quad (1.5.90)$$

即可。

上述第二个“?”可取 $N_1 = [\log_2(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon})] + 1$ 。

因此 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 即 f 在 x_0 处连续。 \square

例 1.5.25

设 $x > 0$, 记

$$y_n = \frac{y_{n-1}}{2} + \frac{x}{2y_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.5.91)$$

证明对任意 $y_0 > 0$, 数列 $\{y_n\}$ 收敛于 \sqrt{x} 。

命题背景 本题是求解方程 $x = y^2$ 的一种迭代方法, 称为 Newton 迭代法。

证明 用数学归纳法可以证明 $y_n > 0 (\forall n \in \mathbb{N})$, 由 AM-GM 不等式可得

$$y_n = \frac{y_{n-1}}{2} + \frac{x}{2y_{n-1}} \geq 2\sqrt{\frac{y_{n-1}}{2} \cdot \frac{x}{2y_{n-1}}} = \sqrt{x} \quad (1.5.92)$$

从而

$$y_{n+1} - y_n = \frac{x - y_{n-1}^2}{2y_{n-1}} \leq 0 \quad (1.5.93)$$

故 $\{y_n\}$ 单调不减且有下界, 从而收敛于 $A \geq \sqrt{x} > 0$.

令递推关系式中的 $n \rightarrow +\infty$, 则有

$$A = \frac{A}{2} + \frac{x}{2A} \implies A = \sqrt{x} \quad (1.5.94)$$

□

例 1.5.26

设 $0 \leq x \leq 1$, 记 $y_0 = 0$,

$$y_n = y_{n-1} + \lambda(x - y_{n-1}^2), \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.5.95)$$

求正数 λ 的值, 使得 $\{y_n\}$ 单调不减; 此时证明 $\{y_n\}$ 收敛, 并求其极限。

解 (1) $y_{n+1} \geq y_n$ 当且仅当 $\lambda(x - y_n^2) \geq 0$, 即 $0 \leq y_n \leq \sqrt{x}$; 由递推公式可知 $0 \leq y_{n+1} \leq \sqrt{x}$ 当且仅当 $y_n + \lambda(x - y_n^2) \leq \sqrt{x}$, 亦即

$$(y_n - \sqrt{x})(\lambda y_n + \lambda\sqrt{x} - 1) \geq 0 \iff y_n \leq \frac{1 - \lambda\sqrt{x}}{\lambda} \quad (1.5.96)$$

取充分条件

$$\frac{1 - \lambda\sqrt{x}}{\lambda} \geq \sqrt{x} \geq \sup\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad (1.5.97)$$

解得

$$\lambda \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \iff \lambda \leq \inf\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}} \mid 0 \leq x \leq 1\right\} = \frac{1}{2} \quad (1.5.98)$$

我们后面还需要验证其必要性。

(2) 此时 $\{y_n\}$ 单调不减, 且有上界, 故收敛。设极限为 A , 则有

$$A = A + \lambda(x - A^2) \implies A = \sqrt{x} \quad (1.5.99)$$

因此

$$\sup\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \sqrt{x} \quad (1.5.100)$$

我们验证了 (1) 中充分条件的必要性。

□

例 1.5.27

设 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 严格增、连续, 证明 $\forall x_0 \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x_0)$ 存在, 且极限值 x^* 满足 $f(x^*) = x^*$.

证明 若 $x_0 = f(x_0)$, 则 $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x_0) = x_0$, 极限显然存在。

若 $x_0 < f(x_0)$, 则由数学归纳法可以证明 $\{f^{(n)}(x_0)\}$ 严格增且有上界 1, 故极限 $x^* = A$ 存在。由于 f 连续, 故

$$f(x^*) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x_0)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(n+1)}(x_0) = x^* \quad (1.5.101)$$

若 $x_0 > f(x_0)$, 同理可证。 □

例 1.5.28

在第一次习题课中, 我们证明了

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} =: b_n \quad (1.5.102)$$

因此 $\{a_n\}$ 严格增且有上界 4, $\{b_n\}$ 严格减且有下界 2, 故两者极限均存在且相等, 记为 e 。记 $\ln = \log_e$, 易见

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \quad (1.5.103)$$

从而有

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad (1.5.104)$$

利用以上事实, 证明数列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (1.5.105)$$

收敛。

证明 注意到

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0 \quad (1.5.106)$$

故 x_n 严格减, 又

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n > \sum_{j=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0 \quad (1.5.107)$$

即 x_n 有下界 0, 故收敛。 □

例 1.5.29

证明

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (1.5.108)$$

提示: 利用

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad (1.5.109)$$

证明 本题的难点在于如何联系 x 与 $\frac{1}{n}$ 。先设 $x \in (0, 1)$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\frac{1}{N+1} < x \leq \frac{1}{N}$ (为什么?), 因此

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{x} &< \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)}{\frac{1}{N+1}} < \frac{\frac{1}{N}}{\frac{1}{N+1}} = 1 + \frac{1}{N} < 1 + 2x \\ &> \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{N+1}\right)}{\frac{1}{N}} > \frac{\frac{1}{N+2}}{\frac{1}{N}} = 1 - \frac{2}{N+2} > 1 - 2x \end{aligned} \quad (1.5.110)$$

即

$$1 - 2x < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 + 2x \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (1.5.111)$$

另一方面, 注意到

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-y)}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1}{1-y}}{y}, \quad y = -x \\ &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+z)}{1 - \frac{1}{1+z}} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+z)}{z} (1+z) = 1, \quad z = \frac{1}{1-y} - 1 \end{aligned} \quad (1.5.112)$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (1.5.113)$$

□

例 1.5.30

设 $a_0 = a > 0$, $b_0 = b > 0$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.5.114)$$

证明 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限。

证明 由数学归纳法可知 $a_n > 0, b_n > 0 (\forall n \in \mathbb{N})$ 。由 AM-GM 不等式可得

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.5.115)$$

因此

$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leq 0, \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \geq 1, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (1.5.116)$$

因此从 $n = 1$ 开始, $\{a_n\}$ 单调减且有下界 b_1 , $\{b_n\}$ 单调增且有上界 a_1 , 故两者极限均存在, 分别设为 A, B . 令 a_n 的递推关系式两边 $n \rightarrow +\infty$, 则

$$A = \frac{A+B}{2} \implies A = B \quad (1.5.117)$$

□

命题背景 上述算法称为算术、几何平均法 (Arithmetic-Geometric Mean Method), 是迭代计算椭圆积分的最常用的方法。把上述极限值记作初值 a, b 的函数 $M(a, b)$, 定义积分

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \quad (1.5.118)$$

Gauss 敏锐地发现¹²

$$I(a, b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right), \quad a, b > 0 \quad (1.5.119)$$

因此

$$I(a, b) = I(a_0, b_0) = I(a_1, b_1) = \dots = I(M(a, b), M(a, b)) = \frac{\pi}{2M(a, b)} \quad (1.5.120)$$

经过变换, 积分 I 可转写为第一类完全椭圆积分 K

$$I(a, b) = \frac{1}{b} K\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right), \quad K(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (1.5.121)$$

由此, 我们找到了计算第一类完全椭圆积分的一种方法。

这种方法的收敛速度如何呢? 注意到

$$|x_{n+1} - y_{n+1}| = \frac{|x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2|}{x_{n+1} + y_{n+1}} = \frac{(x_n - y_n)^2}{4(x_{n+1} + y_{n+1})} \approx \frac{(x_n - y_n)^2}{8M(a, b)} \quad (1.5.122)$$

故这种算法是二阶的, 会很快收敛。

例 1.5.31 (基于单调有界收敛定义指数函数)

$\forall x \in \mathbb{R}$, 定义

$$E_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.5.123)$$

证明:

- (1) 当 $x \neq 0$ 且 $n > -x$ 时, $E_n(x)$ 关于 n 严格增。
- (2) $E_n(x)$ 关于 n 有上界。
- (3) $E(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(x)$ 收敛于正数, $E(1) = e \in (2, 3)$ 。
- (4) 设数列 $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ 有界, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n^2}\right)^n = 1$ 。

¹²参考: https://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetic%E2%80%93geometric_mean, 可利用换元 $\sin \theta = \frac{2a \sin \theta'}{(a+b) + (a-b) \sin^2 \theta'}$ 。

- (5) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $E(x+y) = E(x)E(y)$, 从而 $\forall r \in \mathbb{Q}$, $E(r) = e^r$.
- (6) $E(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 从而 $E(x)$ 处处连续.
- (7) $E(x)$ 关于 x 严格增.
- (8) $E(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$.
- (9) $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x) \geq 1+x$; $\forall x < 1$, $E(x) \leq \frac{1}{1-x}$.
- (10) E 在 \mathbb{R} 上可导, 且 $E'(x) = E(x)$.

解 (1) 由 Bernoulli 不等式可得

$$\begin{aligned} \frac{E_{n+1}(x)}{E_n(x)} &= \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \left[\frac{n(n+x+1)}{(n+1)(n+x)}\right]^n \\ &\geq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \left[1 - \frac{nx}{(n+1)(n+x)}\right] = \frac{(n+x+1)(n^2+n+x)}{(n+1)^2(n+x)} \\ &= 1 + \frac{x^2}{(n+1)^2(n+x)} > 1 \end{aligned} \quad (1.5.124)$$

故 $E_n(x)$ 关于 n 严格增.

(2) 注意到

$$|E_n(x)| = \left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| = \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \right| \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left|\frac{x}{n}\right|^k \leq \sum_{k=0}^n \frac{|x|^k}{k!} \quad (1.5.125)$$

当 $|x| \leq 1$ 时, 有

$$|E_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 3 - \frac{1}{n} \leq 3 \quad (1.5.126)$$

当 $|x| > 1$ 时, 注意到

$$\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \stackrel{?}{\leq} 2 \cdot \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} = 2 \cdot \frac{x^2 \cdot x^2 \cdots x^2}{(2k)(2k-1) \cdots (k+1)} \cdot \frac{1}{k!} \stackrel{?}{\leq} \frac{2}{k!} \quad (1.5.127)$$

选择 $2k+1 \geq k+1 \geq x^2 \geq |x|$, 即 $k \geq K = \lfloor x^2 \rfloor$ 即可保证上式成立, 此时

$$|E_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=\lfloor K/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2}{k!} \leq \sum_{k=0}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!} + 2e \quad (1.5.128)$$

故 $E_n(x)$ 关于 n 有上界.

(3) 由 (1)(2) 知 $E_n(x)$ 收敛, 设极限为 $E(x)$. 取 $N = \max\{0, \lfloor -x \rfloor + 1\}$, 则 $1 + \frac{x}{N} > 0$, 且 $\forall n > N$, 有

$$E_n(x) \geq E_{N+1}(x) \implies E(x) \geq E_{N+1}(x) > E_N(x) = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N > 0 \quad (1.5.129)$$

故 $E(x) > 0$, 且显然有 $3 > e = E(1) > E_1(1) = 2$ 。

(4) 设 $|x_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 。注意到

$$\left(1 + \frac{x_n}{n^2}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x_n}{n^2}\right)^k \quad (1.5.130)$$

其中

$$\left| \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x_n}{n^2}\right)^k \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{n^k M^k}{k! n^{2k}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{M}{n}\right)^k \stackrel{?}{\leq} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{M}{n} \leq (e-1) \frac{M}{n} < \frac{2M}{n} \stackrel{?}{\leq} \varepsilon \quad (1.5.131)$$

取 $n \geq \max\{M, \frac{2M}{\varepsilon}\}$ 即可。

(5) 注意到

$$\frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n^2}\right)^n = 1, \quad x_n = \frac{xy}{1 + \frac{x+y}{n}} \quad (1.5.132)$$

故 $E(x)E(y) = E(x+y)$ 。由数学归纳法可证得 $E(n) = e^n (\forall n \in \mathbb{N})$, 利用 $E(-n)E(n) = E(0) = 1$ 可得 $E(n) = e^n (\forall n \in \mathbb{Z})$ 。设 $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ (其中 $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$), 则

$$E(r)^n = E(m) = e^m \implies E(r) = e^{m/n} = e^r \quad (1.5.133)$$

(6) 设 $|x| < 1$, 注意到

$$|E_n(x) - 1| = \left| \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|x|^k}{k!} \leq |x| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq (e-1)|x| < 2|x| \quad (1.5.134)$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 可得 $|E(x) - 1| < 2|x|$ 。故 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 使得

$$|x| < \delta \implies |E(x) - 1| < 2|x| < 2\delta = \varepsilon \quad (1.5.135)$$

而 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 都有 $E(x_0) > 0$, 此时 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2E(x_0)}$, 使得

$$|x - x_0| < \delta \implies |E(x) - E(x_0)| \leq E(x_0)|E(x - x_0) - 1| < 2\delta E(x_0) = \varepsilon \quad (1.5.136)$$

故 $E(x)$ 处处连续。

(7) 设 $y > x$, 对充分大的 n 利用 Bernoulli 不等式可得

$$\frac{E(y)}{E(x)} = E(y-x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{y-x}{n}\right)^n \geq 1 + y-x > 1 \quad (1.5.137)$$

故 $E(x)$ 关于 x 严格增。

(8) 由 (6)(7) 知 $E(x)$ 连续且严格增, 故 E 将区间映射为区间, 而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) &\geq \lim_{x \rightarrow +\infty} E(\lfloor x \rfloor) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\lfloor x \rfloor} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} E(x) &\leq \lim_{x \rightarrow -\infty} E(\lceil x \rceil) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\lceil x \rceil} = 0 \end{aligned} \quad (1.5.138)$$

故 $E(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$ 。

(9) 当 $n > -x$ 时, $E_n(x)$ 关于 n 严格增, 且由 Bernoulli 不等式可得

$$E_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x \quad (1.5.139)$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 可得 $E(x) \geq 1 + x$, 将 x 换为 $-x$ 可得 $E(-x) \geq 1 - x$, 当 $x < 1$ 时有 $1 - x > 0$, 故有

$$E(x) = \frac{1}{E(-x)} \leq \frac{1}{1-x} \quad (1.5.140)$$

(10) 根据导数的定义, $\forall x \in \mathbb{R}$, 考虑极限

$$E'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(x+h) - E(x)}{h} = E(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h) - 1}{h} \quad (1.5.141)$$

利用 (9) 中的不等式可知

$$1 \leq \frac{E(h) - 1}{h} \leq \frac{1}{1-h}, \quad h < 1 \quad (1.5.142)$$

由夹挤定理可得 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h)-1}{h} = 1$, 从而 $E'(x) = E(x)$ 。 \square

1.5.6 无穷大量与无穷小量

例 1.5.32

\mathcal{O} 和 o 的运算性质。

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(f) &= \mathcal{O}(f), & \mathcal{O}(f)\mathcal{O}(g) &= \mathcal{O}(fg), \\ o(f) + o(f) &= o(f), & \mathcal{O}(f)o(g) &= o(fg), \\ o(f) &= \mathcal{O}(f). \end{aligned} \quad (1.5.143)$$

这里的等式的含义是: 等号左边的运算结果是等号右边集合中的一个对象。

解 提示: 设 $x \rightarrow a$, $u \in \mathcal{O}(f)$ 、 $v \in o(f)$, 利用定义

- $\exists M > 0, \exists \dot{U}(a, \delta_1)$ 使得 $x \in \dot{U}(a, \delta_1) \implies |u(x)| \leq M|f(x)|$ 。
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \dot{U}(a, \delta_2)$ 使得 $x \in \dot{U}(a, \delta_2) \implies |v(x)| \leq \varepsilon|f(x)|$ 。

\square

例 1.5.33

证明: 若

$$f(x) + o(f(x)) = Bg(x) + o(g(x)), \quad x \rightarrow a \quad (1.5.144)$$

则

$$f(x) = Bg(x) + o(g(x)), \quad x \rightarrow a \quad (1.5.145)$$

特别地, 若 $B = 1$, 则 “ f 与 g 等价” 当且仅当 “ g 与 f 等价”。

解 提示: (1)

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |Bg(x) + o(g(x)) - o(f(x))| \leq |B||g(x)| + \frac{1}{2}|g(x)| + \frac{1}{2}|f(x)| \\ \implies |f(x)| &\leq (2|B| + 1)|g(x)|, \quad x \rightarrow a \\ |f(x) - Bg(x)| &= |o(g(x)) - o(f(x))| \leq \varepsilon|f(x)| + \varepsilon|g(x)| \leq \underbrace{2\varepsilon(|B| + 1)}_{\varepsilon'}|g(x)| \\ \implies |f(x) - Bg(x)| &\leq \varepsilon'|g(x)|, \quad x \rightarrow a \end{aligned} \quad (1.5.146)$$

(2) 若 $f(x) = g(x) + o(g(x))$, 则 $f = f + 0 = f + o(f)$, 由 (1) 知 $g(x) = f(x) + o(f(x))$ 。 \square

例 1.5.34

反函数的渐近表达式。设 f 有连续的反函数,

$$f(x) = Ax + Bx^k + o(x^k), \quad x \rightarrow 0, A \neq 0, k > 1 \quad (1.5.147)$$

求 f 的反函数 f^{-1} 在自变量 $y \rightarrow 0$ 时的渐近表达式。

解 提示: 确定主项。由例 1.5.33(1) 可知

$$y = Ax + Bx^k + o(x^k) = Ax + o(x) \implies x = \frac{y}{A} + o(y) \quad (1.5.148)$$

确定第二项。设 $x = \frac{y}{A} + f(y)$, 其中 $f(y) = o(y)$, 则

$$\begin{aligned} y &= A\left(\frac{y}{A} + f(y)\right) + B\left(\frac{y}{A} + f(y)\right)^k + o\left(\left(\frac{y}{A} + f(y)\right)^k\right) \\ 0 &= Af(y) + \frac{B}{A^k}y^k(1 + o(1)) + o(y^k) = Af(y) + \frac{B}{A^k}y^k + o(y^k) \\ f(y) &= -\frac{B}{A^{k+1}}y^k + o(y^k) \end{aligned} \quad (1.5.149)$$

因此

$$x = \frac{y}{A} - \frac{B}{A^{k+1}}y^k + o(y^k), \quad y \rightarrow 0 \quad (1.5.150)$$

\square

例 1.5.35

广义二项式定理。对正有理数 $\frac{m}{n}$ ，求 $x \rightarrow 0$ 时， $(1+x)^{\frac{m}{n}}$ 的渐近展开。

解 Newton 当年得到的结果为：

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = \sum_{i=0}^k \binom{\frac{m}{n}}{i} x^i + o(x^k), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.5.151)$$

其中广义二项式系数的定义为：

- $\binom{\alpha}{0} = 1$;
- $\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}$ 。

我们证明 $k \leq 2$ 的情况。 $k=0$ 显然成立，设 $(1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + f(x)$ ，其中 $f(x) = o(1)$ ，则

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= (1+f(x))^n \\ 1+mx+o(x) &= 1+nf(x)+o(f(x)) \\ \implies f(x) &= \frac{mx}{n} + o(x) \end{aligned} \quad (1.5.152)$$

再设 $(1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}x + g(x)$ ，其中 $g(x) = o(x)$ ，则

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= \left(1 + \frac{m}{n}x + g(x)\right)^n \\ 1+mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + o(x^2) &= 1 + n\left(\frac{m}{n}x + g(x)\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{m}{n}x + g(x)\right)^2 + o(x^2) \\ &= 1 + mx + ng(x) + \frac{m^2(n-1)}{2n}x^2 \\ \implies g(x) &= \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned} \quad (1.5.153)$$

因此

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}x + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.5.154)$$

□

例 1.5.36

幂函数的渐近展开。设 $\alpha \in \mathbb{R}$ ，求 $x \rightarrow 0$ 时， x^α 的渐近展开。提示：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad (1.5.155)$$

解 设

$$u(x) = \frac{(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x}{x} = o(1), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.5.156)$$

则

$$\begin{aligned} (1+2x)^\alpha &= [(1+x)^2 - x^2]^\alpha = [(1+x)^\alpha]^2 \left[1 - \frac{x^2}{(1+x)^2}\right]^\alpha \\ 1 + 2\alpha x + 2xu(2x) &= [1 + \alpha x + xu(x)]^2 \left[1 - \frac{\alpha x^2}{(1+x)^2} + o(x^2)\right] \\ &= [1 + 2\alpha x + 2xu(x) + \alpha^2 x^2][1 - \alpha x^2 + o(x^2)] \\ &= 1 + 2\alpha x + 2xu(x) + \alpha(\alpha - 1)x^2 + o(x^2) \end{aligned} \quad (1.5.157)$$

因此

$$u(2x) - u(x) - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x = o(x), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.5.158)$$

猜测 $u(x) = Ax^\beta + o(x^\beta)$, 其中 $\beta \geq 1$, 代入上式得

$$\begin{aligned} A(2x)^\beta + o((2x)^\beta) - Ax^\beta + o(x^\beta) - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x &= o(x) \\ (2^\beta - 1)Ax^\beta + o(x^\beta) &= \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x + o(x) \end{aligned} \quad (1.5.159)$$

对比等式两侧可得

$$\beta = 1, \quad A = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2(2^\beta - 1)} = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} \quad (1.5.160)$$

因此

$$u(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x + o(x), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.5.161)$$

□

例 1.5.37

指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的渐近展开。

(1) 记 $u(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x}$, 证明 $u(x) = o(1)$, 并且

$$u(2x) - u(x) - \frac{x}{2} = o(x) \implies e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.5.162)$$

(2) 记 $v(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x}$, 证明 $v(x) = o(1)$, 并且

$$v(2x) - v(x) + \frac{x}{2} = o(x) \implies \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.5.163)$$

(3) 记 $w(x) = \frac{\sin x - x}{x}$, 证明 $w(x) = o(1)$, 并且

$$w(2x) - w(x) + \frac{x^2}{2} = o(x) \implies \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.5.164)$$

$$(4) \quad \begin{aligned} \arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0 \\ \arccos x &= \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.5.165)$$

$$(5) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.5.166)$$

证明 提示: (1)

$$\begin{aligned} e^{2x} &= (e^x)^2 \\ 1 + 2x + 2xu(2x) &= (1 + x + xu(x))^2 = 1 + 2x + x^2 + 2xu(x) + o(x^2) \\ \implies u(2x) - u(x) - \frac{x}{2} &= o(x), \quad x \rightarrow 0 \\ \implies u(x) &= \frac{x}{2} + o(x), \quad x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.5.167)$$

(2)

$$\begin{aligned} \ln(1 + 2x) &= 2 \ln(1 + x) + \ln \left(1 - \frac{x^2}{(1+x)^2} \right) \\ 2x + 2xv(2x) &= 2(x + xv(x)) - \frac{x^2}{(1+x)^2} + o(x^2) = 2x + 2xv(x) - x^2 + o(x^2) \\ \implies v(2x) - v(x) + \frac{x}{2} &= o(x), \quad x \rightarrow 0 \\ \implies v(x) &= -\frac{x}{2} + o(x), \quad x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.5.168)$$

或者利用

$$y = e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \implies x = \ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad (1.5.169)$$

(3)

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x = 2 \sin x (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} \\ 2x + 2xw(2x) &= 2(x + xw(x)) (1 - (x + xw(x))^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2x + 2xw(x)) \left[1 - \frac{1}{2}(x + xw(x))^2 + o(x^2) \right] \\ &= 2x + 2xw(x) - x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0 \\ \implies w(2x) - w(x) + \frac{x^2}{2} &= o(x), \quad x \rightarrow 0 \\ \implies w(x) &= -\frac{x^2}{6} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.5.170)$$

(4) 利用

$$y = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \implies x = \arcsin y = y + \frac{y^3}{6} + o(y^3) \quad (1.5.171)$$

(5) 利用

$$\begin{aligned}
 \cos x &= \sqrt{1 - \sin^2 x} = \left[1 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) (x + o(x))^4 + o(x^4) \\
 &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{1.5.172}$$

□

例 1.5.38

设 $\lambda > 1 \geq |A|$ 、 $\alpha > 0$ ，当 $x \rightarrow 0$ 时， f 是无穷小量且满足

$$f(\lambda x) - Af(x) - Bx^\alpha = o(x^\alpha), \quad x \rightarrow 0 \tag{1.5.173}$$

证明

$$f(x) = \frac{B}{\lambda^\alpha - A} x^\alpha + o(x^\alpha), \quad x \rightarrow 0 \tag{1.5.174}$$

解 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists \delta > 0$ ，使得 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$0 < |x| < \delta \implies |f(\lambda x) - Af(x) - Bx^\alpha| < \varepsilon |x|^\alpha \tag{1.5.175}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ ， $0 < |\lambda^{-(k-1)}x| \leq |x| < \delta$ ，从而

$$\left| A^{k-1} f(\lambda^{-(k-1)}x) - A^k f(\lambda^{-k}x) - BA^{k-1} (\lambda^{-k}x)^\alpha \right| < \varepsilon |A|^{k-1} |\lambda^{-k}x|^\alpha \tag{1.5.176}$$

因此 $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\left| f(x) - A^n f(\lambda^{-n}x) - \frac{B}{\lambda^\alpha} x^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{A}{\lambda^\alpha} \right)^k \right| \leq \varepsilon |x|^\alpha \frac{1}{\lambda^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{A}{\lambda^\alpha} \right|^k \tag{1.5.177}$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 可得

$$\left| f(x) - \frac{B}{\lambda^\alpha} \frac{1}{1 - \frac{A}{\lambda^\alpha}} \right| \leq \frac{1}{\lambda^\alpha} \frac{\varepsilon |x|^\alpha}{1 - \frac{|A|}{\lambda^\alpha}} = \frac{\varepsilon |x|^\alpha}{\lambda^\alpha - |A|} \stackrel{?}{\leq} \varepsilon' \frac{|B||x|^\alpha}{\lambda^\alpha - A} \tag{1.5.178}$$

取 ε 满足

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \leq |B| \frac{\lambda^\alpha - |A|}{\lambda^\alpha - A} \in (0, |B|] \tag{1.5.179}$$

即可，因此

$$f(x) = \frac{B}{\lambda^\alpha - A} x^\alpha + o(x^\alpha), \quad x \rightarrow 0 \tag{1.5.180}$$

在进行严谨证明时，不能猜测 $f(x) = Cx^\beta + o(x^\beta)$ ，因为这样仅仅证明了蕴涵式“若 f 具有这个形式则结论成立”为真，与“结论成立”为真无关。 □

例 1.5.39

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$ 。

错解 (1) 错误使用等价无穷小替换。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x + o(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3} = ? \quad (1.5.181)$$

(2) 预先假设极限存在。

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - 2x}{(2x)^3} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \tan 2x - x}{x^3} \\ 4L - L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \tan 2x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3 x}{x^3(1 - \tan^2 x)} = 1 \\ \implies L &= \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (1.5.182)$$

类似 (2) 的思路，我们可以证明很多离谱的“极限”，如

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \implies \frac{L}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} = L \implies L = 0 \quad (1.5.183)$$

□

解

$$\begin{aligned} \frac{\tan x - x}{x^3} &= \frac{\sin x - x \cos x}{x^3 \cos x} \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^3(1 + o(1))} \\ &= \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3(1 + o(1))} = \frac{1}{3} + o(1) \rightarrow \frac{1}{3}, \quad x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.5.184)$$

也可类似前题的思路：设 $\tan x = x + u(x)$ ，则

$$\begin{aligned} \sin x &= [x + u(x)] \cos x \\ x + o(x) &= [x + u(x)][1 + o(1)] = x + u(x) + o(x) \end{aligned} \quad (1.5.185)$$

故可设 $u(x) = xv(x)$, 其中 $v(x) = o(1)$, 则

$$\begin{aligned}\tan 2x &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\ 2x + 2xv(2x) &= \frac{2(x + xv(x))}{1 - (x + xv(x))^2} \\ 2x + 2xv(x) &= 2x[1 + v(2x)][1 - (x + xv(x))^2] = 2x[1 + v(2x)][1 - x^2 + o(x^2)] \\ &= 2x[1 + v(2x) - x^2 + o(x^2)] = 2x + 2xv(2x) - 2x^3 + o(x^3) \\ \implies v(2x) - v(x) - x^2 &= o(x), \quad x \rightarrow 0 \\ \implies v(x) &= \frac{x^2}{3} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0\end{aligned}\tag{1.5.186}$$

□

例 1.5.40

求单侧极限

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \frac{\pi}{2}}{x-1}\tag{1.5.187}$$

解 记 $h = 1 - x$, $t = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \in [0, \pi]$, 则 $h \rightarrow 0^\pm$ 当且仅当 $x \rightarrow 1^\mp$,

$$\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2(1-h)}{1+(1-h)^2} = \frac{1}{1 + \frac{h^2}{2(1-h)}} \rightarrow 1^-\tag{1.5.188}$$

于是 $t = 0^+$, 上式两边展开可得

$$1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 - \frac{h^2}{2(1-h)} + o(h^2) = 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2) \implies t^2 = h^2 + o(h)\tag{1.5.189}$$

从而

$$t = \sqrt{h^2 + o(h^2)} = |h|\sqrt{1 + o(1)} = |h|(1 + o(1))\tag{1.5.190}$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \frac{\pi}{2}}{x-1} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-t}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(1 + o(1))}{h} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \frac{\pi}{2}}{x-1} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-t}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h(1 + o(1))}{h} = -1\end{aligned}\tag{1.5.191}$$

□

1.5.7 极限的综合练习

例 1.5.41

求

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \right) \quad (1.5.192)$$

解

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} &= x \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{1}{2}} - x \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) - x \left(1 - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= \frac{4}{3} + o(1) \rightarrow \frac{4}{3}, \quad x \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (1.5.193)$$

□

例 1.5.42

求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)} \quad (1.5.194)$$

解

$$\frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)} = \frac{\tan x + o(\tan x)}{\sin x + o(\sin x)} = \frac{x + o(x)}{x + o(x)} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0 \quad (1.5.195)$$

□

例 1.5.43

求

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left(\cos \frac{1}{x} \right) \quad (1.5.196)$$

解 记 $t = \frac{1}{x}$, 则 $x \rightarrow +\infty$ 当且仅当 $t \rightarrow 0^+$, 因此

$$x^2 \ln \left(\cos \frac{1}{x} \right) = \frac{\ln(\cos t)}{t^2} = \frac{\ln \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right)}{t^2} = \frac{-\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t^2} \rightarrow -\frac{1}{2} \quad (1.5.197)$$

□

例 1.5.44

求

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}} \quad (1.5.198)$$

解

$$\begin{aligned} (2 \sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}} &= \exp \frac{\ln(2 \sin x + \cos x)}{x} = \exp \frac{\ln(1 + 2x + o(x))}{x} \\ &= \exp \frac{2x + o(x)}{x} = \exp(2 + o(1)) \rightarrow e^2, \quad x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.5.199)$$

□

例 1.5.45

求

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad (1.5.200)$$

解

$$\begin{aligned} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} &= \exp \left[n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - n \right] \\ &= \exp \left[n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - n \right] \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2} + o(1) \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad n \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (1.5.201)$$

□

例 1.5.46

设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 求参数 p 的值, 使得

$$x^p \left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} \right) \quad (1.5.202)$$

为非零实数, 并求这个极限的值。

解 记 $t = \frac{1}{x}$, 则 $x \rightarrow +\infty$ 当且仅当 $t \rightarrow 0^+$, 因此

$$\begin{aligned} x^p \left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} \right) &= \frac{1}{t^p} \left(e^{t \ln a} - \exp \frac{t \ln a}{1+t} \right) \\ &= \frac{1}{t^p} \left(1 + t \ln a + \frac{t^2 \ln^2 a}{2} + o(t^2) - 1 - \frac{t \ln a}{1+t} - \frac{t^2 \ln^2 a}{2(1+t)^2} + o(t^2) \right) \\ &= \frac{1}{t^p} \left(t \ln a + \frac{t^2 \ln^2 a}{2} - t(1-t) \ln a - \frac{t^2 \ln^2 a}{2} + o(t^2) \right) \\ &= \frac{\ln a + o(1)}{t^{p-2}} \rightarrow \ln a \neq 0, \quad t \rightarrow 0^+ \end{aligned} \quad (1.5.203)$$

所以 $p = 2$, 并且上述极限为 $\ln a$ 。

或者利用

$$\begin{aligned} x^p a^{\frac{1}{x+1}} \left(a^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - 1 \right) &= x^p (1 + o(1)) \left[\ln a \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) + o \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \right] \\ &= x^{p-2} \ln a + o(x^{p-2}) = \begin{cases} \ln a, & p = 2 \\ 0, & p < 2 \\ \infty, & p > 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5.204)$$

□

例 1.5.47

比较以下两式作为 e 的误差。

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+\alpha}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad (1.5.205)$$

解

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+\alpha} &= \exp \left((n+\alpha) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \\ &= \exp \left((n+\alpha) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \right) \\ &= \exp \left(1 + \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{n} + \frac{-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}}{n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &= e \left(1 + \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{n} + \frac{\frac{1}{2} (\alpha - \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2})}{n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right), \quad n \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (1.5.206)$$

故当 $\alpha \neq \frac{1}{2}$ 时, $(1 + \frac{1}{n})^{n+\alpha}$ 与 $\frac{1}{n}$ 同阶; 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, $(1 + \frac{1}{n})^{n+\alpha}$ 与 $\frac{1}{n^2}$ 同阶; 即在这一数列族中, $(1 + \frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}$ 收敛最快, 但它的收敛速度远不如 $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, 因为

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e \left(1 + o \left(\frac{2}{(n+1)!} \right) \right), \quad n \rightarrow +\infty \quad (1.5.207)$$

□

例 1.5.48

计算

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} \quad (1.5.208)$$

解 利用 AM-GM 不等式可得

$$1 < n^{1/k} = \sqrt[k]{\underbrace{1 \cdots 1}_{k-2} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} < \frac{k-2+2\sqrt{n}}{k} < 1 + \frac{2\sqrt{n}}{k}, \quad k \geq 2 \quad (1.5.209)$$

因此

$$\begin{aligned} \text{Ans} &> \frac{n+1+1+\cdots+1}{n} = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \\ \text{Ans} &< 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(1 + \frac{2\sqrt{n}}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < 2 - \frac{1}{n} + \frac{2 \ln n}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (1.5.210)$$

由夹挤定理可得极限存在且等于 2。 □

例 1.5.49

计算

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^n + 2^n + \cdots + n^n}{n^1 + n^2 + \cdots + n^n} \quad (1.5.211)$$

解 首先考虑分母。易见

$$n^1 + n^2 + \cdots + n^n = n^n(1 + o(1)) \quad (1.5.212)$$

然后考虑分子。注意到

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^n}{n^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \quad (1.5.213)$$

可以证明

$$0 \leq e^{-k} - \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \leq \frac{k^2 e^{-k}}{n} \quad (1.5.214)$$

因此

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n - e^{-k} \right] \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2 e^{-k}}{n} \leq \sum_{k < 9} \frac{k^2 e^{-k}}{n} + \sum_{k \geq 9} \frac{k^2 \cdot k^{-4}}{n} \leq \frac{A}{n} \quad (1.5.215)$$

从而

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n - \frac{e}{e-1} \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n - e^{-k} \right| + \left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k} - \frac{1}{1-e^{-1}} \right| \\ &\leq \frac{A}{n} + \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-k} = \frac{A}{n} + \frac{e^{-n}}{1-e^{-1}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (1.5.216)$$

亦即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^n + 2^n + \cdots + n^n}{n^1 + n^2 + \cdots + n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n^n(1 + o(1))} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \frac{e}{e-1} \quad (1.5.217)$$

□

例 1.5.50

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ 有界且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ 。证明： $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ 。

证明 由题设可知 $\forall \varepsilon' > 0, \exists N > 0$ 使得 $n > N \implies |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon'$ 。注意到

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= x_{n+p} + x_{n+p-1} + x_{n+p-2} + \cdots + x_{n+1} \\ &= (x_{n+p} - x_{n+p-1}) + 2(x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + \cdots + p(x_{n+1} - x_n) + px_n \end{aligned} \quad (1.5.218)$$

设 $|S_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$, 则

$$|x_n| \leq \frac{2M}{p} + |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| < \frac{2M}{p} + p\varepsilon' \stackrel{?}{\leq} \varepsilon \quad (1.5.219)$$

选择 p 和 ε' 满足

$$\frac{2M}{p} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad p\varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies p \geq \frac{4M}{\varepsilon}, \quad \varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{2p} \quad (1.5.220)$$

整理一下我们已有的信息, 我们有

$$\forall \varepsilon \rightarrow \exists p \rightarrow \exists \varepsilon' \rightarrow \exists N \rightarrow \forall n > N \rightarrow |x_n| < \varepsilon \quad (1.5.221)$$

即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ 。

□

1.6 讲义习题

1.6.1 自然数集与数学归纳法

例 1.6.1 (习题 1.1.2)

证明对任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$2 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n) = n(n+1) \quad (1.6.1)$$

$$1 + 3 + 4 + \cdots + (2n+1) = (n+1) \cdot (n+1) \quad (1.6.2)$$

证明 考虑数学归纳法。对于第一个等式,

1. 当 $n = 0$ 时, $\text{LHS} = 2 \cdot 0 = 0$, $\text{RHS} = 0 \cdot 1 = 0$, 等式成立。

2. 设命题对 $n = k$ 成立, 则当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 \text{LHS} &= 2 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1)) \\
 &= 2 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + k) + 2(k + 1) \\
 &= k(k + 1) + 2(k + 1) \\
 &= (k + 1)(k + 2) \\
 &= \text{RHS}
 \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

对于第二个等式,

1. 当 $n = 0$ 时, $\text{LHS} = 1$, $\text{RHS} = 1$, 等式成立。

2. 设命题对 $n = k$ 成立, 则当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 \text{LHS} &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) + (2(k + 1) + 1) \\
 &= (k + 1)(k + 1) + 2(k + 1) + 1 \\
 &= [(k + 1)(k + 1) + (k + 1)] + [(k + 1) + 1] \\
 &= [(k + 1) + 1](k + 1) + [(k + 1) + 1] \\
 &= [(k + 1) + 1][(k + 1) + 1] \\
 &= \text{RHS}
 \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

综上, 由数学归纳法, 命题对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立。 □

1.6.2 实数集

例 1.6.2 (习题 1.4.8)

证明:

- (1) 整数集 \mathbb{Z} 在实数集 \mathbb{R} 中既无上界, 又无下界。
- (2) 对任意实数 x , 存在唯一的整数 $[x]$ 使得 $[x] \leq x < [x] + 1$, 其中 $[x]$ 称为实数 x 的整数部分。
- (3) 设 $a > 1$, 对任意实数 $x > 0$, 存在唯一的整数 n 使得 $a^n \leq x < a^{n+1}$ 。

证明 (1) $\forall x \in \mathbb{R}$, 设 $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq |x|\}$ 。显然 $0 \in A$ 且 $|x|$ 是 A 的上界, 由确界公理可知 A 必有上确界, 记为 n_0 。 $n_0 - 1$ 必不为 A 的上界, 故 $\exists n \in A$ 满足 $n_0 - 1 < n \leq |x|$, $n + 1 \in \mathbb{N}$ 是 A 的上界。

设实数 x 是整数集 \mathbb{Z} 的上界或下界, 则 $\exists n' \in \mathbb{N}$ 满足 $n' > |x|$, 即 $n' > x$ 且 $-n' < x$, 与假设矛盾。因此整数集 \mathbb{Z} 在实数集 \mathbb{R} 中既无上界, 又无下界。

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$, 设 $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ 。根据 (1) 中的结论, A 非空有上界, 同理可知 $\exists n \in A$ 满足 $\sup A - 1 < n \leq x$, $n+1 \in \mathbb{Z}$ 是 A 的上界。

下证 $x < n+1$ 。假设 $x \geq n+1$, 则 $n+1 \in A$, 与 $n+1$ 是 A 的上界矛盾。故 $x < n+1$, 即 $n \leq x < n+1$ 。

下证 n 唯一。假设存在 $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ 满足 $n_1 \leq x < n_1 + 1$ 且 $n_2 \leq x < n_2 + 1$, 两不等式相减可得 $n_1 - n_2 - 1 < 0 < n_1 + 1 - n_2 \implies -1 < n_1 - n_2 < 1$, 则 $n_1 = n_2$ 。故 n 唯一。

(3) $\forall x > 0$, 设 $A = \{n \in \mathbb{N} \mid a^n \leq x\}$ 。注意到

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= [1 + (a-1)]^{n+1} > 1 + (n+1)(a-1) > n(a-1) \stackrel{?}{>} x \\ a^{n'} &= [1 + (a-1)]^{n'} > 1 + n'(a-1) > n'(a-1) \stackrel{?}{>} \frac{1}{x} \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

取 $n = \left\lfloor \frac{x}{a-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x(a-1)} \right\rfloor + 1$, 则 $-n \in A$ 且 $n+1$ 是 A 的上界。故 A 非空有上界, 必有上确界。同理可知 $\exists n \in A$ 满足 $\sup A - 1 < n$ 且 $n+1 \in \mathbb{Z}$ 为 A 的上界, 故 $a^n \leq x < a^{n+1}$ 。

下证 n 唯一。假设存在 $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ 满足 $a^{n_1} \leq x < a^{n_1+1}$ 且 $a^{n_2} \leq x < a^{n_2+1}$, 两不等式相除可得 $a^{n_1-n_2-1} < a^0 < a^{n_1+1-n_2}$, 由 a^n 的单调性可知 $-1 < n_1 - n_2 < 1 \implies n_1 = n_2$ 。故 n 唯一。 \square

1.6.3 函数的连续性

例 1.6.3 (习题 2.1.2)

用定义证明: 若 f, g 都在 x_0 处连续, 且 $g(x_0) \neq 0$, 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处连续。

证明 由 f 在 x_0 处连续, $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ 使得

$$x \in U(x_0, \delta_1) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon' \quad (1.6.6)$$

由 g 在 x_0 处连续, $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists \delta_2 > 0$ 使得

$$x \in U(x_0, \delta_2) \implies |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon' \quad (1.6.7)$$

因此

$$|g(x)| \geq |g(x_0)| - |g(x) - g(x_0)| > |g(x_0)| - \varepsilon' \stackrel{?}{\geq} \frac{1}{2}|g(x_0)| \quad (1.6.8)$$

取 $0 < \varepsilon' \leq \frac{1}{2}|g(x_0)|$, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, 则

$$\begin{aligned} x \in U(x_0, \delta) \implies \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right| &= \left| \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \right| \\ &= \left| \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x_0) + f(x_0)[g(x_0) - g(x)]}{g(x)g(x_0)} \right| \\ &\leq \frac{|f(x) - f(x_0)||g(x_0)| + |f(x_0)||g(x_0) - g(x)|}{|g(x)||g(x_0)|} \\ &< \frac{|g(x_0)| + |f(x_0)|}{|g(x_0)|^2} 2\varepsilon' \stackrel{?}{\leq} \varepsilon \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

故取

$$\varepsilon' = \frac{1}{2}|g(x_0)| \min \left\{ 1, \frac{|g(x_0)|\varepsilon}{|g(x_0)| + |f(x_0)|} \right\} \quad (1.6.10)$$

因此 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处连续。 □

例 1.6.4 (习题 2.1.3)

设 $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}(I)$, 记 $g(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$, 证明 $g \in \mathcal{C}(I)$ 。

证明 参见例 1.5.12。 □

例 1.6.5 (习题 2.1.6)

以下论证希望表明任何增函数都是连续函数。

设 $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ 是增函数。任取 $x_0 \in (a, b)$, $\forall \varepsilon > 0$, 取 x_{\pm} 使得 $f(x_{\pm}) = f(x_0) \pm \varepsilon$ 以及 $\delta = \min\{x_0 - x_-, x_+ - x_0\}$, 则 $x_- < x_0 < x_+$, $\delta > 0$, 且 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

$$f(x_0) - \varepsilon = f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+) = f(x_0) + \varepsilon \quad (1.6.11)$$

因此 f 在 x_0 处连续。

上述结论对吗? 上述证明对吗? 请将其修改为一个正确的证明。

解 上述结论和证明均不正确, 因为 f 可以有跳跃间断点, 无法保证 $f(x_{\pm}) = f(x_0) \pm \varepsilon$ 存在。如修改结论为: 任何满射增函数都是连续函数, 则结论正确; 证明过程仿上, 但保证了 x_{\pm} 的存在性。 □

例 1.6.6 (习题 2.1.7)

以下论证希望证明 x^2 是连续函数。

$\forall a \in \mathbb{R}$, 任取正数 $\varepsilon \in (0, a^2)$, 使得当

$$|x - a| < \min \left\{ \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a, a - \sqrt{a^2 - \varepsilon} \right\} \quad (1.6.12)$$

时,

$$\sqrt{a^2 - \varepsilon} - a < x - a < \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a \quad (1.6.13)$$

从而

$$\sqrt{a^2 - \varepsilon} < x < \sqrt{a^2 + \varepsilon} \quad (1.6.14)$$

因此

$$a^2 - \varepsilon < x^2 < a^2 + \varepsilon \quad (1.6.15)$$

于是 $|x^2 - a^2| < \varepsilon$, 所以 x^2 在 $x = a$ 处连续。

这个论证有问题吗?

解 当 $a = 0$ 时找不到满足要求的 ε 。 □

例 1.6.7 (习题 2.1.10)

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在任何有界闭区间上有界, 且满足 $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (1.6.16)$$

证明 f 是连续函数。

证明 任取 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, 我们有

$$f\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(x_0)}{2} \quad (1.6.17)$$

依据题意, f 没有第二类间断点, 因此函数在 \mathbb{R} 上所有点的左右极限存在。分别令 $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow x_0^+$ 可得

$$\begin{aligned} f(x_0^-) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} f\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) + f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0^-) + f(x_0)}{2} \\ f(x_0^+) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} f\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) + f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0)}{2} \end{aligned} \quad (1.6.18)$$

由此解得

$$f(x_0^-) \leq f(x_0), \quad f(x_0^+) \leq f(x_0) \quad (1.6.19)$$

$\forall \delta > 0$, 注意到

$$f(x_0) \leq \frac{f(x_0 - \delta) + f(x_0 + \delta)}{2} \quad (1.6.20)$$

令 $\delta \rightarrow 0^+$ 可得

$$f(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(x_0) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 - \delta) + f(x_0 + \delta)}{2} = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} \leq f(x_0) \quad (1.6.21)$$

因此

$$f(x_0) = f(x_0^-) = f(x_0^+) \quad (1.6.22)$$

即 f 在 x_0 处连续。 \square

1.6.4 函数在一点处的极限

例 1.6.8 (习题 2.2.1)

记 $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x}$, 请用 Excel 计算 $f(1 - 0.1^n)$ 和 $f(1 + 0.1^n)$, 观察并思考其中出现的问题。

解 Excel 的计算结果如表 1.6.1 所示。由于机器精度的限制, 当 n 过大时计算机已不可区分 $1 - 0.1^n$ 和 1, 故在计算中会产生“除以零”错误。 \square

例 1.6.9 (习题 2.2.2)

(有理分式与根式, 换元及四则运算) 求极限:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + x^2 - 6x}$;
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{m/n} - a^{m/n}}{x - a}$, 其中 $m, n \in \mathbb{N}^*$;
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$;
- (5) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$ 。

解 (1) 令 $h = x - 2$, 则

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x+3)(x-2)} = \frac{x-1}{x(x+3)} = \frac{h+1}{(h+2)(h+5)} \rightarrow \frac{1}{10}, \quad x \rightarrow 2 \quad (1.6.23)$$

(2) 令 $h = x - a$, 由二项式定理可得

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^{k-1} a^{n-k} \rightarrow na^{n-1}, \quad x \rightarrow a \quad (1.6.24)$$

表 1.6.1: Excel 计算结果

n	$1 - 0.1^n$	$1 + 0.1^n$	$f(1 - 0.1^n)$	$f(1 + 0.1^n)$
1	0.9	1.1	-1.222222222	-0.818181818
2	0.99	1.01	-1.02020202	-0.98019802
3	0.999	1.001	-1.002002002	-0.998001998
4	0.9999	1.0001	-1.00020002	-0.99980002
5	0.99999	1.00001	-1.00002	-0.99998
6	0.999999	1.000001	-1.000002	-0.999998
7	0.9999999	1.0000001	-1.000000201	-0.999999796
8	0.99999999	1.00000001	-1.000000044	-1
9	0.999999999	1.000000001	-0.999999889	-1
10	1	1	-1	-1
11	1	1	-1	-1
12	1	1	-0.999888975	-1
13	1	1	-1.001109878	-1
14	1	1	-1.022222222	-1.022222222
15	1	1	-1.111111111	-1.2
16	1	1	-2	#DIV/0!
17	1	1	#DIV/0!	#DIV/0!
18	1	1	#DIV/0!	#DIV/0!
19	1	1	#DIV/0!	#DIV/0!

(3) 令 $y = \sqrt[n]{x}$, 则

$$\frac{x^{m/n} - a^{m/n}}{x - a} = \frac{y^m - (a^{1/n})^m}{y - a^{1/n}} \frac{y - a^{1/n}}{y^n - (a^{1/n})^n} \rightarrow \frac{m \cdot a^{(m-1)/n}}{n \cdot a^{(n-1)/n}} = \frac{m}{n} a^{m/n-1}, \quad x \rightarrow a \quad (1.6.25)$$

(4)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x} &= \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} + \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} + \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{1-x} + 1} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, \quad x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.6.26)$$

(5)

$$\frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \frac{1+2x-9}{x-4} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} \rightarrow \frac{4}{3}, \quad x \rightarrow 4 \quad (1.6.27)$$

□

例 1.6.10 (习题 2.2.4)

求极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数;(2) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$.

解 (1) 易见

$$\left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x} \right] + 1 \quad (1.6.28)$$

因此

$$\begin{aligned} x \left[\frac{1}{x} \right] - x &< x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1 < x \left[\frac{1}{x} \right] + x, \quad x > 0 \\ x \left[\frac{1}{x} \right] + x &< 1 \leq x \left[\frac{1}{x} \right] < x \left[\frac{1}{x} \right] - x, \quad x < 0 \end{aligned} \quad (1.6.29)$$

即

$$1 - |x| < x \left[\frac{1}{x} \right] < 1 + |x|, \quad \forall x \neq 0 \quad (1.6.30)$$

故有

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1 \quad (1.6.31)$$

(2)

$$0 \leq \left| \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0 \quad (1.6.32)$$

□

例 1.6.11 (习题 2.2.6)

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, $c > 0$, 证明

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} c, & f(x) > c \\ f(x), & |f(x)| \leq c \\ -c, & f(x) < -c \end{cases} \quad (1.6.33)$$

是连续函数。

证明 易见

$$g(x) = \frac{|f(x) + c| - |f(x) - c|}{2} \quad (1.6.34)$$

故 g 连续。 □

例 1.6.12 (习题 2.2.7)

三角函数的基本性质及其推论。

(1) 证明 \sin, \cos 是连续函数。

(2) 记 $x_0 = \frac{\pi}{2}$ 、 $x_n = \frac{x_0}{2^n}$ 。一方面, 我们有递推关系

$$\sin x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \cos x_n}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 x_n}}{2}} = \frac{\sin x_n}{\sqrt{2(1 + \sqrt{1 - \sin^2 x_n})}} \quad (1.6.35)$$

另一方面, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 知当 $|x| > 0$ 足够小时, $\sin x \approx x$, 因此当 n 足够大时, $2^{n+1} \sin x_n \approx \pi$ 。请根据以上信息估算 π 的近似值, 并比较 $\sin x_n$ 的两种递推关系的计算结果。

(3) 对给定的正整数 n , 画出 $(\frac{k\pi}{2^{n+1}}, \sin \frac{k\pi}{2^{n+1}})$ (其中 $k = 0, 1, \dots, 2^{n+1}$) 的大致位置, 描绘曲线 $y = \sin x$ 在区间 $[0, \pi]$ 中的大致图形。

解 (1) $\sin, \cos \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, 且一致连续。 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0$, 使得 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 都有

$$|x - y| < \delta \implies \begin{cases} |\sin x - \sin y| \leq 2 \sin \frac{|x-y|}{2} \leq |x-y| < \varepsilon \\ |\cos x - \cos y| \leq 2 \sin \frac{|x-y|}{2} \leq |x-y| < \varepsilon \end{cases} \quad (1.6.36)$$

(2) 利用 Excel 计算可得两种递推公式估算 π 的结果, 如表 1.6.2 所示。由此可见 π 的近似值约为

$$\pi \approx 3.14159265358979 \quad (1.6.37)$$

此外我们可以观察到, 若采用第一种递推公式, 当 $n > 18$ 时估算 π 值的误差开始变大, 这是由于第一种递推公式涉及大数减小数, 造成有效数字的严重丢失。第二种递推公式则较好地估计了 π 值。

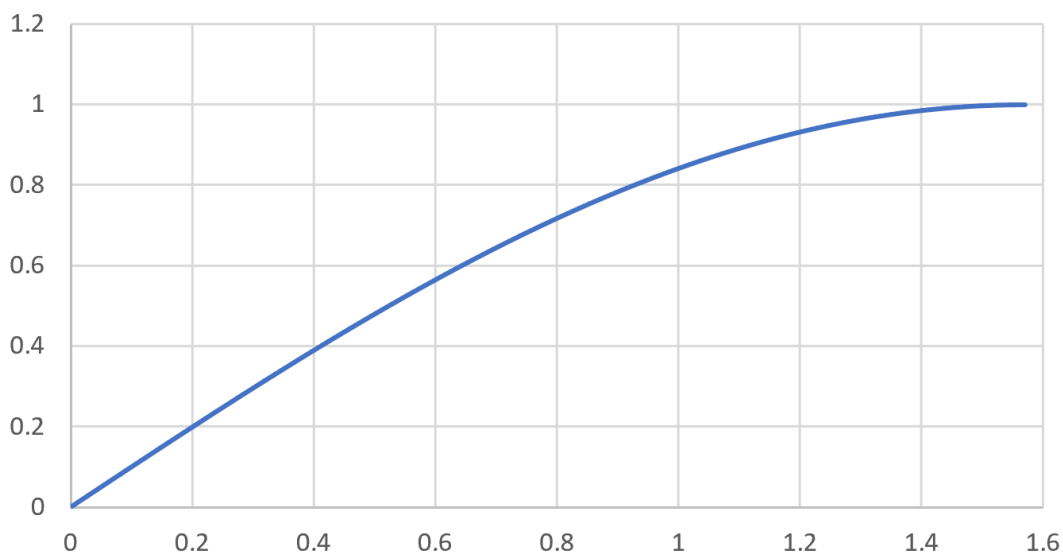
(3) 由于函数图像关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 故我们仅取 $k = 0, 1, \dots, 2^n$ 。取 $n = 10$, 由表 1.6.2 可知

$$\sin \frac{\pi}{2^{n+1}} = \sin x_n \approx 1.53398018628477 \times 10^{-3} \quad (1.6.38)$$

利用递推公式

$$\sin \frac{(k+1)\pi}{2^{n+1}} = \sin \frac{k\pi}{2^{n+1}} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{2^{n+1}}} + \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{k\pi}{2^{n+1}}} \quad (1.6.39)$$

即可计算出所有点的坐标, 如图 1.6.1 所示。 □

图 1.6.1: $\sin x$ 在 $[0, \pi/2]$ 上的图像

1.6.5 单侧极限与间断, 单调函数的极限与连续性

例 1.6.13 (习题 2.3.6)

设 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个有界函数, $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $g(x) = \sup_{t \in [a, x]} f(t)$.

- (1) 证明: g 单调不减。
- (2) 证明: 若 f 是连续函数, 则 g 也是连续函数。
- (3) 如果不假定 f 是连续函数, 那么 g 是否为连续函数? 是否具有单侧连续性?

解 (1) $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, 若 $x_1 \leq x_2$, 则

$$[a, x_1] \subseteq [a, x_2] \implies \sup_{t \in [a, x_1]} f(t) \leq \sup_{t \in [a, x_2]} f(t) \implies g(x_1) \leq g(x_2) \quad (1.6.40)$$

(2) 由于 f 连续, 故 $\forall x_0 \in (a, b)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得

$$x \in (a, b) \wedge |x - x_0| < \delta \implies f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \leq g(x_0) + \varepsilon \quad (1.6.41)$$

当 $x \in [x_0, x_0 + \delta)$ 时, 有

$$g(x_0) \leq g(x) = \max \left\{ g(x_0), \sup_{t \in [x_0, x]} f(t) \right\} \leq \max \{ g(x_0), g(x_0) + \varepsilon \} = g(x_0) + \varepsilon \quad (1.6.42)$$

表 1.6.2: 两种递推公式估算 π 的结果

n	x_n	递推式 1	π 的近似值 1	递推式 2	π 的近似值 2
0	1.570796E + 00	1.000000E + 00	2.000000E + 00	1.000000E + 00	2.000000E + 00
1	7.853982E - 01	7.071068E - 01	2.828427E + 00	7.071068E - 01	2.828427E + 00
2	3.926991E - 01	3.826834E - 01	3.061467E + 00	3.826834E - 01	3.061467E + 00
3	1.963495E - 01	1.950903E - 01	3.121445E + 00	1.950903E - 01	3.121445E + 00
4	9.817477E - 02	9.801714E - 02	3.136548E + 00	9.801714E - 02	3.136548E + 00
5	4.908739E - 02	4.906767E - 02	3.140331E + 00	4.906767E - 02	3.140331E + 00
6	2.454369E - 02	2.454123E - 02	3.141277E + 00	2.454123E - 02	3.141277E + 00
7	1.227185E - 02	1.227154E - 02	3.141514E + 00	1.227154E - 02	3.141514E + 00
8	6.135923E - 03	6.135885E - 03	3.141573E + 00	6.135885E - 03	3.141573E + 00
9	3.067962E - 03	3.067957E - 03	3.141588E + 00	3.067957E - 03	3.141588E + 00
10	1.533981E - 03	1.533980E - 03	3.141591E + 00	1.533980E - 03	3.141591E + 00
11	7.669904E - 04	7.669903E - 04	3.141592E + 00	7.669903E - 04	3.141592E + 00
12	3.834952E - 04	3.834952E - 04	3.141593E + 00	3.834952E - 04	3.141593E + 00
13	1.917476E - 04	1.917476E - 04	3.141593E + 00	1.917476E - 04	3.141593E + 00
14	9.587380E - 05	9.587380E - 05	3.141593E + 00	9.587380E - 05	3.141593E + 00
15	4.793690E - 05	4.793690E - 05	3.141593E + 00	4.793690E - 05	3.141593E + 00
16	2.396845E - 05	2.396845E - 05	3.141593E + 00	2.396845E - 05	3.141593E + 00
17	1.198422E - 05	1.198423E - 05	3.141593E + 00	1.198422E - 05	3.141593E + 00
18	5.992112E - 06	5.992111E - 06	3.141592E + 00	5.992112E - 06	3.141593E + 00
19	2.996056E - 06	2.996060E - 06	3.141597E + 00	2.996056E - 06	3.141593E + 00
20	1.498028E - 06	1.498030E - 06	3.141597E + 00	1.498028E - 06	3.141593E + 00
21	7.490141E - 07	7.489965E - 07	3.141519E + 00	7.490141E - 07	3.141593E + 00
22	3.745070E - 07	3.744612E - 07	3.141208E + 00	3.745070E - 07	3.141593E + 00
23	1.872535E - 07	1.873047E - 07	3.142451E + 00	1.872535E - 07	3.141593E + 00
24	9.362676E - 08	9.365235E - 08	3.142451E + 00	9.362676E - 08	3.141593E + 00
25	4.681338E - 08	4.712161E - 08	3.162278E + 00	4.681338E - 08	3.141593E + 00
26	2.340669E - 08	2.356080E - 08	3.162278E + 00	2.340669E - 08	3.141593E + 00
27	1.170334E - 08	1.053671E - 08	2.828427E + 00	1.170334E - 08	3.141593E + 00
28	5.851672E - 09	0.000000E + 00	0.000000E + 00	5.851672E - 09	3.141593E + 00
29	2.925836E - 09	0.000000E + 00	0.000000E + 00	2.925836E - 09	3.141593E + 00
30	1.462918E - 09	0.000000E + 00	0.000000E + 00	1.462918E - 09	3.141593E + 00

当 $x \in (x_0 - \delta, x_0]$ 时, 有

$$g(x) \leq g(x_0) = \max \left\{ g(x), \sup_{t \in [x, x_0]} f(t) \right\} \leq \max \{ g(x), f(x_0) + \varepsilon \} \quad (1.6.43)$$

若 $g(x) \geq f(x_0) + \varepsilon$, 则有 $g(x) = g(x_0)$; 若 $g(x) < f(x_0) + \varepsilon$, 则有

$$g(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon \implies g(x_0) \geq g(x) \geq f(x) > f(x_0) - \varepsilon \geq g(x_0) - 2\varepsilon \quad (1.6.44)$$

综上所述, 我们有

$$|g(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon \implies g \in \mathcal{C}(a, b) \quad (1.6.45)$$

(3) 不是。设 f 单调不减, $f(x_0^-) < f(x_0) < f(x_0^+)$, 容易验证 $g(x_0^-) = f(x_0^-) < g(x_0) = f(x_0) < g(x_0^+) = f(x_0^+)$, 故 g 在 x_0 处不连续, 也不具有单侧连续性。□

例 1.6.14 (习题 1.6.1, 习题 2.3.8 前身)

三角函数的基本性质及其推论。正弦和余弦 \sin, \cos 是定义在 \mathbb{R} 上的函数, 满足: 存在正数 $\pi > 0$ 使得

(a) $\cos 0 = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \cos \pi = -1$ 。

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad (1.6.46)$$

(c) $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x} \quad (1.6.47)$$

我们把 (a,b,c) 作为三角函数 \sin, \cos 的基本性质, 用它们得到这两个函数的其他性质。证明:

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 。

(2) $\sin 0 = \sin \pi = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ 。

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x; \quad (1.6.48)$$

(4) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x, \\ \sin(2\pi + x) &= \sin x, \quad \cos(2\pi + x) = \cos x; \end{aligned} \quad (1.6.49)$$

(5) $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y; \\ \sin x - \sin y &= 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2}, \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x - y}{2} \sin \frac{x + y}{2}; \end{aligned} \quad (1.6.50)$$

(6) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x; \\ \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \\ \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x;\end{aligned}\tag{1.6.51}$$

(7) $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1\tag{1.6.52}$$

(8) \sin 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上严格增, \cos 在 $[0, \pi]$ 上严格减。

(9) \sin, \cos 的最小正周期是 2π 。

(10) $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(11) 利用 (10) 中的结果, 计算 $\sin \frac{k\pi}{12} (k = 0, 1, 2, \dots, 12)$ 。

(12) $3 < \pi < \frac{6}{\sqrt{3}} < 3.5$ 。

(13) $\frac{\pi}{2}$ 是 \cos 在区间 $[0, 3]$ 内的唯一零点。

(14) 记 $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$, 证明: \tan 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上有定义, 且是奇函数、严格增, 并满足

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}, \quad \forall 0 < y < x < \frac{\pi}{2}\tag{1.6.53}$$

(15) \sin, \cos 究竟是什么?

证明 (1) 利用 (b), 取 $x = y$ 即可得到。

(2) 利用 (a)(1), 分别取 $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 即可得到。

(3) 利用 (a)(b)(2), 分别取 $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 即可得到。

(4) 利用 (a)(b)(2), 注意到

$$\sin(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x\tag{1.6.54}$$

分别取 $(x, y) = (\frac{\pi}{2} + x', \frac{\pi}{2}), (\pi + x', \pi)$ 即可得到

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x\tag{1.6.55}$$

因此

$$\sin(\pi + x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x\tag{1.6.56}$$

故有

$$\sin(2\pi + x) = -\sin(\pi + x) = \sin x, \quad \cos(2\pi + x) = \cos(\pi + x) = -\cos x \quad (1.6.57)$$

(5) 利用 (b), 取 $y = -y'$ 即可得到 \cos 的和角公式, 再注意到

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - y\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned} \quad (1.6.58)$$

只需注意到 $x = \frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2}, y = -\frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2}$ 即可得到和差化积公式。

(6) 利用 (5), 对和角公式取 $x = y$ 即可得到倍角公式; 取 $y = 2x$ 即可得到三倍角公式。

(7) 利用 (6), $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 由倍角公式可得

$$\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \cos x < \frac{1}{\cos x} \cdot \cos x = 1 \quad (1.6.59)$$

取 $x' = \frac{x}{2}$ 即可。

(8) 利用 (1)(3)(5)(7), 我们知道 $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 有 $0 < \cos x \leq 1$, $\forall x \in (0, \pi)$ 有 $0 < \sin x \leq 1$ 。不妨设 $-\frac{\pi}{2} \leq y < x \leq \frac{\pi}{2}$, 则有 $0 < \frac{x-y}{2} < \frac{\pi}{2}$ 且 $-\frac{\pi}{2} < \frac{x+y}{2} < \frac{\pi}{2}$, 由和差化积可得

$$\sin x - \sin y > 0 \quad (1.6.60)$$

不妨设 $0 \leq y < x \leq \pi$, 则有 $0 < \frac{x-y}{2} \leq \frac{x+y}{2} < \pi$, 由和差化积可得

$$\cos x - \cos y > 0 \quad (1.6.61)$$

得证。

(9) 由于 $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ 且 $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos 0 = 1$ 且 $\cos \pi = -1$, \sin, \cos 的最小正周期 $T > \pi$ 。由 (4) 知 2π 是 \sin, \cos 的周期。假设存在 $T \in (\pi, 2\pi)$ 为 \sin, \cos 的周期, 利用 (8) 可知

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 0 = \cos T = -\cos(T - \pi) < -\cos(2\pi - \pi) = 1, \\ -1 &= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(T - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(T - \frac{3\pi}{2}\right) > -\sin\left(2\pi - \frac{3\pi}{2}\right) = -1 \end{aligned} \quad (1.6.62)$$

矛盾。故 \sin, \cos 的最小正周期是 2π 。

(10) 设 $x = \cos \frac{\pi}{6}$, 则有 $0 = \cos \frac{\pi}{2} = 4x^3 - 3x = 4x(x^2 - \frac{3}{4})$, 由于 $0 < x < 1$, 解得 $x = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 因此 $\sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}$ 。同理, 由倍角公式可得 $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(11) 注意到

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad (1.6.63)$$

因此

$$\left\{ \sin \frac{k\pi}{12} \right\}_{k=0}^{12} = \left\{ 0, \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, 1, \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, 0 \right\} \quad (1.6.64)$$

(12) 注意到

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} < \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} < 1 \implies 3 < \pi < \frac{6}{\sqrt{3}} < \frac{7}{2} \quad (1.6.65)$$

(13) 利用 (2)(8), \cos 在 $[0, \pi] \supseteq [0, 3]$ 上严格减, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, 因此 $\frac{\pi}{2}$ 是 \cos 在区间 $[0, 3]$ 内的唯一零点。

(14) 不妨设 $-\frac{\pi}{2} < x < y < \frac{\pi}{2}$, 则 $0 < \cos x \leq 1$ 且 $0 < x - y < \pi$, 因此

$$\begin{aligned} \tan(-x) &= \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x \\ \tan x - \tan y &= \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \sin y \cos x}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} > 0 \end{aligned} \quad (1.6.66)$$

因此 \tan 是奇函数、严格增。 $\forall 0 < y < x < \frac{\pi}{2}$, 注意到

$$\tan(x-y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)} = \frac{\sin x \cos y - \sin y \cos x}{\cos x \cos y + \sin x \sin y} = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \quad (1.6.67)$$

(15) 略。 □

例 1.6.15 (习题 2.3.8)

三角函数的值域、反三角函数。

(1) 证明: \sin, \cos 的值域为 $[-1, 1]$ 。

(2) 证明: 在区间 $[0, \pi]$ 上, \cos 有连续的反函数 $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$; 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上, \sin 有连续的反函数 $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 。

证明 (1) 由习题 1.6.1 可知 \sin 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上严格增, \cos 在 $[0, \pi]$ 上严格减, 且 \sin, \cos 连续, 故

$$\sin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] = [-1, 1], \quad \cos[0, \pi] = [-1, 1] \quad (1.6.68)$$

由于 \sin, \cos 的最小正周期是 2π , 且

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x \quad (1.6.69)$$

故 \sin, \cos 的值域为 $[-1, 1]$ 。

(2) 由于 \sin 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上连续且严格增, 故存在连续的反函数; \cos 同理。 □

1.6.6 无穷远、无穷小与无穷大, 数列的极限

例 1.6.16 (习题 2.4.2)

关于极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$, 有人认为: 当 x 充分大时, $x^2+1 \approx x^2$, $x^2-1 \approx x^2$, 所以 $\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \approx 1$, 从而 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = 1$. 请问这样的说法成立吗? 为什么? 作为一个对照, 请讨论极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x^\alpha} - x)$, 其中 $0 < \alpha < 2$.

解 不成立, 因为“ \approx ”是一个不良定义的符号, 余项必须要用类似 o 的符号表示出来. 事实上, 我们有

$$\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \left[1 + \frac{2}{x^2-1}\right]^{1/2} = 1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow \infty \quad (1.6.70)$$

对于另一个极限, 则有

$$\sqrt{x^2+x^\alpha} - x = x \left[(1+x^{\alpha-2})^{1/2} - 1\right] = \frac{1}{2}x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}), \quad x \rightarrow \infty \quad (1.6.71)$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x^\alpha} - x) = \begin{cases} 0, & 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{2}, & \alpha = 1 \\ \infty, & 1 < \alpha < 2 \end{cases} \quad (1.6.72)$$

□

例 1.6.17 (习题 2.4.3)

设 $0 < a < b$, $f(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

解 注意到

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= b \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x + 1}{2}\right]^{1/x} = b \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x + 1}{2}}{x} = b \exp 0 = b \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= a \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x + 1}{2}\right]^{1/x} = a \exp \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x + 1}{2}}{x} = a \exp 0 = a \end{aligned} \quad (1.6.73)$$

□

例 1.6.18 (习题 2.4.8)

用 Excel 计算以下数列 $(1 + \frac{1}{n})^n$, $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, $(1 + \frac{1}{n})^{n+\lambda}$ ($0 < \lambda < 1$) 和 $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, 观察它们的单调性并比较它们的收敛速度.

解 分别取 $\lambda = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$, 计算以上 6 个数列与其极限 e 的差, 如表 1.6.3 所示。观察可知:

- 当 $0 < \lambda < \frac{2\ln 3 - 3\ln 2}{2\ln 2 - \ln 3} \approx 0.409421$ 时¹³, 数列 $(1 + \frac{1}{n})^{n+\lambda}$ 单调递增; 当 $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$ 时, 数列 $(1 + \frac{1}{n})^{n+\lambda}$ 单调递减。
- 数列族 $(1 + \frac{1}{n})^{n+\lambda}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) 在 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时收敛最快, 但收敛速度都远远慢于 $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ 。

□

表 1.6.3: 6 个计算 e 的数列的收敛速度

n	$\lambda = 0$	$\lambda = \frac{1}{4}$	$\lambda = \frac{1}{2}$	$\lambda = \frac{3}{4}$	$\lambda = 1$	$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - e$
1	-7.1828E-01	-3.3987E-01	1.1015E-01	6.4530E-01	1.2817E+00	-7.1828E-01
2	-4.6828E-01	-2.2825E-01	3.7394E-02	3.3137E-01	6.5672E-01	-2.1828E-01
3	-3.4791E-01	-1.7115E-01	1.8786E-02	2.2289E-01	4.4221E-01	-5.1615E-02
4	-2.7688E-01	-1.3681E-01	1.1293E-02	1.6789E-01	3.3348E-01	-9.9485E-03
5	-2.2996E-01	-1.1392E-01	7.5362E-03	1.3466E-01	2.6770E-01	-1.6152E-03
6	-1.9666E-01	-9.7581E-02	5.3859E-03	1.1240E-01	2.2362E-01	-2.2627E-04
7	-1.7178E-01	-8.5338E-02	4.0409E-03	9.6454E-02	1.9200E-01	-2.7860E-05
8	-1.5250E-01	-7.5823E-02	3.1436E-03	8.4470E-02	1.6823E-01	-3.0586E-06
9	-1.3711E-01	-6.8215E-02	2.5153E-03	7.5134E-02	1.4969E-01	-3.0289E-07
10	-1.2454E-01	-6.1995E-02	2.0582E-03	6.7656E-02	1.3483E-01	-2.7313E-08
11	-1.1408E-01	-5.6813E-02	1.7153E-03	6.1531E-02	1.2266E-01	-2.2606E-09
12	-1.0525E-01	-5.2431E-02	1.4515E-03	5.6423E-02	1.1251E-01	-1.7288E-10
13	-9.7681E-02	-4.8677E-02	1.2442E-03	5.2099E-02	1.0390E-01	-1.2286E-11
14	-9.1130E-02	-4.5424E-02	1.0784E-03	4.8389E-02	9.6523E-02	-8.1490E-13
15	-8.5403E-02	-4.2578E-02	9.4362E-04	4.5173E-02	9.0122E-02	-5.0182E-14
16	-8.0353E-02	-4.0068E-02	8.3263E-04	4.2358E-02	8.4517E-02	0.0000E+00
17	-7.5867E-02	-3.7837E-02	7.4013E-04	3.9873E-02	7.9569E-02	0.0000E+00
18	-7.1856E-02	-3.5842E-02	6.6224E-04	3.7663E-02	7.5168E-02	0.0000E+00
19	-6.8248E-02	-3.4046E-02	5.9602E-04	3.5686E-02	7.1228E-02	0.0000E+00
20	-6.4984E-02	-3.2422E-02	5.3927E-04	3.3905E-02	6.7681E-02	0.0000E+00

例 1.6.19 (习题 2.4.9)

证明:

(1) 数列 $c_n = 1 + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n! \cdot n}$ 严格减, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = e$ 。

¹³详细证明需要用到导数, 此处略去。

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 都有

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n! \cdot n} \quad (1.6.74)$$

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(2\pi n! \cdot e) = 2\pi$ 。

(4) e 是无理数。

证明 (1) 注意到

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{(n+1)! \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n! \cdot n} = -\frac{1}{n! \cdot n(n+1)^2} < 0 \quad (1.6.75)$$

故 $\{c_n\}$ 严格减且有下界 1, 故极限存在。记 $a_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, 则有

$$c_n = a_n + \frac{1}{n! \cdot n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 0 = e \quad (1.6.76)$$

(2) 由于 $\{c_n\}$ 严格减且极限为 e , $\{a_n\}$ 严格增且极限为 e , 故

$$a_{n+1} < e < c_n \implies \frac{1}{(n+1)!} < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n! \cdot n} \quad (1.6.77)$$

(3) 注意到 $a_n \cdot n!$ 必为整数, 故有

$$n! \cdot a_n + \frac{1}{n+1} = n! \cdot \left(a_n + \frac{1}{(n+1)!}\right) < n! \cdot e < n! \cdot \left(a_n + \frac{1}{n! \cdot n}\right) = n! \cdot a_n + \frac{1}{n} \quad (1.6.78)$$

因此

$$n \sin \frac{2\pi}{n+1} < n \sin(2\pi n! \cdot e) < n \sin \frac{2\pi}{n} \quad (1.6.79)$$

上述不等式两侧的极限均存在且为 2π , 由夹挤定理可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(2\pi n! \cdot e) = 2\pi \quad (1.6.80)$$

(4) 设 $e \in \mathbb{Q}$, 则 $\exists M, N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $e = \frac{M}{N}$, 则 $\forall n > N$, 均有 $n \sin(2\pi n! \cdot e) = 0$, 与 (3) 矛盾。故 e 是无理数。 \square

例 1.6.20 (习题 2.4.16)

设 $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ 。

(1) 设 $0 \leq A < \alpha < B$, 证明 $\exists N$ 使得 $n \geq N \implies A < \frac{a_{n+1}}{a_n} < B$, 从而 $\frac{A^n}{A^N} A^n < a_n < \frac{B^n}{B^N} B^n$ 。

(2) 设 $\alpha < 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ 。

(3) 利用 (1) 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$ 。

证明 (1) 取 $\varepsilon = \min\{\alpha - A, B - \alpha\}$, $\exists N > 0$ 使得

$$n > N \implies A - \alpha \leq -\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - \alpha < \varepsilon \leq B - \alpha \implies A < \frac{a_{n+1}}{a_n} < B \quad (1.6.81)$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_N} &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} < B^{n-N} \implies a_n < \frac{a_N}{B^N} B^n \\ \frac{a_n}{a_N} &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} > A^{n-N} \implies a_n > \frac{a_N}{A^N} A^n \end{aligned} \quad (1.6.82)$$

(2) 取 $B = \frac{1+\alpha}{2} \in (0, 1)$, 则

$$0 < a_n < \frac{a_N}{B^N} B^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \quad (1.6.83)$$

(3) 设 $0 < A_1 < A_3 < \alpha < A_4 < A_2$, 由 (1) 可知 $\exists N_1 > 0$ 使得

$$n > N_1 \implies A_1 < A_3 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < A_4 < A_2 \quad (1.6.84)$$

设 N_0 满足

$$n > N_0 \implies A_1^n < \frac{a_N}{A_3^N} A_3^n < a_n < \frac{a_N}{A_4^N} A_4^n < A_2^n \quad (1.6.85)$$

这只需要

$$n > N_0 \geq \max \left\{ \frac{N \ln A_3 - \ln a_N}{\ln A_3 - \ln A_1}, \frac{\ln a_N - N \ln A_4}{\ln A_2 - \ln A_4}, 0 \right\} \quad (1.6.86)$$

此时有

$$A_1 < \sqrt[n]{a_n} < A_2 \quad (1.6.87)$$

故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A_1, A_2, A_3, A_4$ 使得 $\alpha - \varepsilon < A_1 < A_3 < \alpha < A_4 < A_2 < \alpha + \varepsilon$, $\exists N = \max\{N_0, N_1\}$ 使得

$$n > N \implies \alpha - \varepsilon < A_1 < \sqrt[n]{a_n} < A_2 < \alpha + \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha \quad (1.6.88)$$

□

例 1.6.21 (习题 2.4.17)

设 $a > 1$ 及 $k > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{a^n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}$ 。

解 利用习题 2.4.14 的结论可得

$$\begin{aligned} \frac{a^{n+1}/(n+1)!}{a^n/n!} &= \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \\ \frac{(n+1)^k/a^{n+1}}{n^k/a^n} &= \frac{(1+\frac{1}{n})^k}{a} \rightarrow \frac{1}{a} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \\ \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} &= \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \rightarrow \frac{1}{e} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \end{aligned} \quad (1.6.89)$$

□

例 1.6.22 (习题 2.4.19)

求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a}$ 、 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$ 、 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n}$ 、 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ 、 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}}$ 。

证明 利用习题 2.4.14 的结论可得

$$\begin{aligned} \frac{a}{a} = 1 &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \\ \frac{n+1}{n} \rightarrow 1 &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \\ \frac{\ln(n+1)/(n+1)}{\ln n/n} = \frac{n}{n+1} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \rightarrow 1 &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \\ \frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow 1 &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}} = 1 \end{aligned} \quad (1.6.90)$$

其中

$$1 < \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{\ln n + \ln 2}{\ln n} \rightarrow 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 \quad (1.6.91)$$

□

例 1.6.23 (习题 2.4.20)

设 $a > 1$ 、 $k > 0$ ，求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$ 、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k}$ 、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x}$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^k \ln x$ 。

解 我们首先证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0 \quad (1.6.92)$$

首先考虑离散的情况，注意到

$$\frac{\ln(n+1)/(n+1)^k}{\ln n/n^k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \rightarrow 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0 \quad (1.6.93)$$

设 $n = [x]$ ，则有

$$\frac{\ln(n+1) - \ln 2}{(n+1)^k} \leq \frac{\ln n}{(n+1)^k} < \frac{\ln x}{x^k} < \frac{\ln(n+1)}{n^k} \leq \frac{\ln n + \ln 2}{n^k} \quad (1.6.94)$$

由夹挤原理可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0 \quad (1.6.95)$$

因此

$$\begin{aligned} x^{1/x} &= \exp \frac{\ln x}{x} \rightarrow \exp 0 = 1 \\ \frac{x^k}{a^x} &\stackrel{t=a^x}{=} \frac{(\log_a t)^k}{t} = \frac{1}{(\ln a)^k} \left(\frac{\ln t}{t^{1/k}} \right)^k \rightarrow \frac{1}{(\ln a)^k} \cdot 0^k = 0 \\ x^k \ln x &\stackrel{t=x^{-1}}{=} -\frac{\ln t}{t^k} \rightarrow -0 = 0 \end{aligned} \quad (1.6.96)$$

□

1.6.7 大 O 与小 o, 函数的主项, 阶的比较

例 1.6.24 (习题 2.5.4)

(1) 设 f 在 $x=0$ 处连续, $f(0)=0$, 并且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = \lambda$, 证明:

$$f(x) = \lambda x + o(x), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.6.97)$$

(2) 利用上述结果证明:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.6.98)$$

用这个办法得到 e^x 在 $x \rightarrow 0$ 时的更高阶展开式。

(3) 求 $\sin x$ 在 $x \rightarrow 0$ 时的更高阶展开式。

解 (1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in I$,

$$0 < |x| < \delta \implies |f(2x) - f(x) - \lambda x| < \varepsilon |x| \quad (1.6.99)$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 < 2^{-(k-1)} \leq |x| < \delta$, 从而

$$|f(2^{-(k-1)}x) - f(2^{-k}x) - \lambda \cdot 2^{-k}x| < \varepsilon \cdot 2^{-k}|x| \quad (1.6.100)$$

因此 $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\left| f(x) - f(2^{-n}x) - \lambda x \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \right| \leq \varepsilon |x| \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \quad (1.6.101)$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 可得

$$|f(x) - \lambda x| \leq \varepsilon |x| \implies f(x) = \lambda x + o(x), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.6.102)$$

得证。

(2) 设 $e^x = 1 + x + xf(x)$, 其中 $f(x) = o(1)$, 注意到 $e^{2x} = e^x \cdot e^x$, 因此

$$1 + 2x + 2xf(2x) = [1 + x + xf(x)]^2 = 1 + 2x + 2xf(x) + x^2 + o(x^2) \quad (1.6.103)$$

亦即

$$f(2x) - f(x) = \frac{x}{2} + o(x) \implies f(x) = \frac{x}{2} + o(x), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.6.104)$$

因此

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.6.105)$$

(3) 设 $\sin x = x + xf(x)$, 其中 $f(x) = o(1)$, 注意到 $\sin 2x = 2 \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x}$, 因此

$$2x + 2xf(2x) = 2x [1 + f(x)] [1 - x^2 + o(x^2)]^{1/2} = 2x \left[1 + f(x) - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right] \quad (1.6.106)$$

亦即

$$f(2x) - f(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) = o(x) \quad (1.6.107)$$

由例 1.5.38 的结论可知

$$f(x) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.6.108)$$

因此

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.6.109)$$

□

1.7 教材习题

例 1.7.1 (刘/闫/章· 习题 1.1.7)

证明下列命题:

- (1) 设 A 为有上界的非空数集, 则 $\xi = \sup A$ 的充分必要条件是: ξ 为 A 的上界, 并且 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $x \in A$ 使得 $x > \xi - \varepsilon$.
- (2) 设 A 为有下界的非空数集, 则 $\eta = \inf A$ 的充分必要条件是: η 为 A 的下界, 并且 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $x \in A$ 使得 $x < \eta + \varepsilon$.

证明 (1) 必要性: 设 $\xi = \sup A$, 则 ξ 为 A 的上界. $\forall \varepsilon > 0$, $\xi - \varepsilon$ 不是 A 的上界, 故 $\exists x \in A$ 使得 $x > \xi - \varepsilon$.

充分性: 设 ξ 为 A 的上界, 并且 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $x \in A$ 使得 $x > \xi - \varepsilon$. 假设 ξ 不是 A 的上确界, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\xi - \varepsilon_0$ 是 A 的上界, 即 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall x \in A$, 都有 $x \leq \xi - \varepsilon_0$, 与题设矛盾. 因此 ξ 是 A 的上确界.

(2) 必要性: 设 $\eta = \inf A$, 则 η 为 A 的下界. $\forall \varepsilon > 0$, $\eta + \varepsilon$ 不是 A 的下界, 故 $\exists x \in A$ 使得 $x < \eta + \varepsilon$.

充分性: 设 η 为 A 的下界, 并且 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $x \in A$ 使得 $x < \eta + \varepsilon$. 假设 η 不是 A 的下确界, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\eta + \varepsilon_0$ 是 A 的下界, 即 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall x \in A$, 都有 $x \geq \eta + \varepsilon_0$, 与题设矛盾. 因此 η 是 A 的下确界. □

例 1.7.2 (刘/闫/章·习题 2.4.7)

确定下列无穷小量在 $x \rightarrow 0^+$ 处的阶, 并按照阶的高低排列出来。

$$\sin x^2, 2\sqrt{x} + x^3, e^{x^3} - 1, \sin(\tan x), \ln(1 + x^{2/3}), 1 - \cos x^2, \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} \quad (1.7.1)$$

解 它们的阶分别为

$$x^2, x^{1/2}, x^3, x, x^{2/3}, x^4, x^{1/4} \quad (1.7.2)$$

从高到底排序为

$$1 - \cos x^2 < e^{x^3} - 1 < \sin x^2 < \ln(1 + x^{2/3}) < 2\sqrt{x} + x^3 < \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} < \sin(\tan x) \quad (1.7.3)$$

□

例 1.7.3 (刘/闫/章·习题 2.4.8)

将下列无穷大量在 $n \rightarrow +\infty$ 处按照阶的高低排列出来。

$$n^2, e^n, \ln(1 + n^2), \sqrt{n}, 2^n, \sqrt{n^3 + \sqrt{n}}, n^n, n! \quad (1.7.4)$$

解 从低到高排序为

$$\ln(1 + n^2) < \sqrt{n} < \sqrt{n^3 + \sqrt{n}} < n^2 < 2^n < e^n < n! < n^n \quad (1.7.5)$$

□

例 1.7.4 (刘/闫/章·习题 2.4.9 偶数序号题)

求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(\cos \frac{1}{x} \right).$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{e^x - 1}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\cos \sqrt{x} - 1 + x}.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos \frac{x}{2})}{x^3 \ln(1+x)}.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \right).$$

解 (1)

$$\frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} = \frac{x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} \rightarrow -2, \quad x \rightarrow 0 \quad (1.7.6)$$

(2)

$$\frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + o(x)}{-x + o(x)} \rightarrow -1, \quad x \rightarrow 0 \quad (1.7.7)$$

(3) 令 $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$, 则

$$\text{LHS} = \frac{\ln(\cos t)}{t^2} = \frac{\ln\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)}{t^2} = \frac{-\frac{1}{2}t^2 + o(t^2)}{t^2} \rightarrow -\frac{1}{2}, \quad t \rightarrow 0 \quad (1.7.8)$$

(4)

$$\frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{e^x - 1} = \frac{\tan x + o(\tan x)}{x + o(x)} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0 \quad (1.7.9)$$

(5)

$$\frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\cos \sqrt{x} - 1 + x} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}}{1 - \frac{x}{2} + o(x) - 1 + x} = \frac{\frac{x^2}{4} + o(x^2)}{\frac{x}{2}} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0 \quad (1.7.10)$$

(6)

$$\frac{1 - \cos\left(1 - \cos \frac{x}{2}\right)}{x^3 \ln(1+x)} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{x}{2}\right)^2 + o\left[\left(1 - \cos \frac{x}{2}\right)^2\right]}{x^4 + o(x^4)} = \frac{\frac{x^4}{128} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \rightarrow \frac{1}{128}, \quad x \rightarrow 0 \quad (1.7.11)$$

(7) 令 $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$, 则

$$\text{LHS} = \frac{(1+2t)^{1/2} - (1-t)^{1/3}}{t} = \frac{t + o(t) + \frac{t}{3} + o(t)}{t} = \frac{4}{3} + o(1), \quad t \rightarrow 0 \quad (1.7.12)$$

□

例 1.7.5 (刘/闫/章· 习题 2.4.11)

设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 + \alpha x^2)^{1/3} - 1$ 与 $1 - \cos x$ 是等价无穷小, 求常数 α 。

解 由于

$$\frac{(1 + \alpha x^2)^{1/3} - 1}{1 - \cos x} = \frac{\frac{\alpha}{3}x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} \rightarrow \frac{2\alpha}{3}, \quad x \rightarrow 0 \quad (1.7.13)$$

故 $\alpha = \frac{3}{2}$ 。

□

第2次习题课 极限与实数的重要性质

2023年10月23日, 2025年10月22日。本节对应微积分 A(1) 第3 (后半) 次习题课的内容。

2.1 知识点复习

2.1.1 实数的连续性, 迭代与不动点

重要概念回顾

- (1) 闭集、闭区间。
- (2) **Cauchy 数列**: $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ 使得 $\forall m, n > N, |a_m - a_n| < \varepsilon$ 。

重要定理回顾

- (1) **有界闭区间套定理**: 设一系列非空有界闭区间 $[a_n, b_n]$ 构成一个区间套, 即 $\forall n \in \mathbb{N}^*, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, 则 $\bigcap_{n \geq 1} [a_n, b_n] \neq \emptyset$ 。若进一步 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一的实数 A 使得 $\bigcap_{n \geq 1} [a_n, b_n] = \{A\}$ 。
- (2) **列紧性**: 任何有界的实数列必含有收敛的子列。
- (3) **数列收敛的 Cauchy 准则**: 数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 收敛当且仅当它是一个 Cauchy 数列。

应用

- (1) **Banach 压缩不动点定理**: 设 I 是闭集, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f(I) \subseteq I$, 且存在常数 $0 < \lambda < 1$ 使得 $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$ (此时称 f 为集合 I 上的一个压缩映射), 则存在唯一的 $x^* \in I$ 使得 $f(x^*) = x^*$ (即 x^* 是 f 的不动点); 并且 $\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = x^*$, 其中 $f^{(n)}$ 表示 f 的 n 次迭代。
- (2) 考虑 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x, x_n = f^{(n)}(x_0)$, 则 $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \{x_n\}$ 收敛于 $f(x)$ 的不动点, 即方程 $x = \cos x$ 的唯一实数解。

2.1.2 连续函数的介值性质, 反函数的连续性

重要概念回顾 基本初等函数、初等函数。

重要定理回顾

- (1) **连续函数的介值性质:** 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 则 $f(I) = \{f(x)|x \in I\}$ 也是区间。等价说法是, 若 $x_1, x_2 \in I$, $f(x_1) < f(x_2)$, 则 $\forall y \in (f(x_1), f(x_2))$, 存在介于 x_1, x_2 之间的 x 使得 $f(x) = y$ 。
- (2) 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续单射, 则 f 是严格单调函数, 且 $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ 是连续函数。
- (3) 初等函数都是连续函数。

注 连续函数的介值性质也称连续函数的零点定理。

2.1.3 有界闭集上的连续函数

重要定理回顾

- (1) $I \subseteq \mathbb{R}$ 是有界闭集当且仅当 I 中任何数列都含有在 I 中收敛的子列。
- (2) 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是非空有界闭集, 则 I 有最大值和最小值。
- (3) 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是有界闭集, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 连续. 则 $f(I) = \{f(x)|x \in I\}$ 是有界闭集。
- (4) 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是有界闭集, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 连续. 则 $f(I) = \{f(x)|x \in I\}$ 有最大值和最小值。

应用

- (1) $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ 是连续函数, 但 f 在区间 $(0, 1)$ 内没有最大值和最小值。
- (2) $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ 是连续函数, 但 f 在闭区间 $[1, +\infty)$ 内没有最大值和最小值。
- (3) 函数

$$g(x) = \begin{cases} (-1)^p p, & x = \frac{q}{p}, p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{Z}, \gcd(p, q) = 1 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad (2.1.1)$$

在区间 $[0, 1]$ 上既无上界也无下界, 从而既没有最大值, 也没有最小值。

- (4) **代数学基本定理:** 任何复系数非常值多项式至少有一个复数根。

2.1.4 函数的一致连续性

重要概念回顾 一致连续: 称函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $K \subseteq I$ 上是一致连续的, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall x, y \in K, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

重要定理回顾 设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $K \subseteq I$ 是有界闭集. 则 f 在 K 上是一致连续的.

应用

- (1) 称函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个 Lipschitz 函数, 若 $\exists L > 0$, 使得 $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Lipschitz 函数是一致连续的。
- (2) 函数 \sqrt{x} 在 $[0, +\infty)$ 上是一致连续的。
- (3) 函数 x^2 在 \mathbb{R} 上不是一致连续的, 但在任何有界闭区间上都是一致连续的。
- (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x^2 + 1} - \sin x) = 0$.

2.2 习题课内容

2.2.1 Cauchy 数列、子列、Heine 归结定理

例 2.2.1

判断题: $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 是有限实数当且仅当: 对任意数列 x_n , 若 $x_n \neq c$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ 都是有限实数。

解 正确。 \implies : 显然成立。 \impliedby : 可采用反证法。假设 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq A$, 即 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 使得取 $\delta = \frac{1}{n}$, $\exists x_n$ 满足 $0 < |x_n - c| < \frac{1}{n}$ 且 $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. 则数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n \neq c$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c$, 但 $\{f(x_n)\}$ 不收敛于 A , 与假设矛盾。 \square

例 2.2.2

判断题: 设 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 是单调函数, A 是有限实数或 $A = +\infty$ 或 $A = -\infty$. 则 $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = A$ 当且仅当存在数列 $\{x_n\} \subseteq (a, b)$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A$.

解 正确。 \Rightarrow : 显然成立。 \Leftarrow : 不妨设 $\{x_n\}$ 严格增 (取使其严格增的收敛子列即可), 补充定义 $x_0 = a$, 则 $\forall x \in (a, b)$, $\exists n_x \in \mathbb{N}^*$ 使得 $x_{n-1} \leq x < x_n$, 故有 $f(x_{n-1}) \leq f(x) \leq f(x_n)$ 或 $f(x_{n-1}) \geq f(x) \geq f(x_n)$ 成立。令 $x \rightarrow +\infty$, 则 $n_x \rightarrow +\infty$, 从而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. \square

例 2.2.3

不定项选择题: 以下哪些数列是 Cauchy 数列?

(A) $(-1)^n \sqrt{n} + \frac{1}{n^2}$

(B) $\cos n$

(C) $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$

(D) $\sum_{k=2}^n \frac{\sin kx}{k(k+\sin kx)}$

(E) $\sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k^2}$

解 CDE。Cauchy 数列等价于数列收敛, 显然 (A)(B) 不收敛。对于 (C), 记 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$, 注意到 $\{a_{2n}\}$ 严格减且有下界

$$a_{2n} = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k(2k-1)} > -\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k(2k-2)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n}\right) > -\frac{3}{4} \quad (2.2.1)$$

因此 $\{a_{2n}\}$ 收敛。又因为 $a_{2n+1} = a_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, 故 $\{a_{2n+1}\}$ 也收敛于同一极限, 因而 $\{a_n\}$ 收敛。

对于 (D)(E), 注意到若 $\sum_{k=1}^n |a_k|$ 收敛, 则 $\sum_{k=1}^n a_k$ 收敛, 利用 Cauchy 收敛准则即可证明: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得

$$\begin{aligned} m > n > N &\Rightarrow \sum_{k=1}^m |a_k| - \sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=1}^n a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \left| \frac{\sin kx}{k(k+\sin kx)} \right| &\leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n} < 1 \\ \sum_{k=1}^n \left| \frac{\sin k}{k^2} \right| &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n} < 2 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

故 (D)(E) 对应的加了绝对值的数列单调不减且有上界, 故均收敛。 \square

注 我们相当于证明了级数收敛的 Leibniz 判别法与绝对收敛蕴涵收敛。

例 2.2.4

不定项选择题：以下命题中哪些是“ $\{x_n\}$ 不是 Cauchy 数列”的充分必要条件：

- (A) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$, 使得 $\forall n, m \geq N$ 都有 $|x_n - x_m| > \varepsilon$
- (B) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$, 使得 $\exists n, m \geq N$ 满足 $|x_n - x_m| > \varepsilon$
- (C) $\exists \varepsilon > 0$, 使得 $\exists N \geq 1$, 使得 $\forall n, m \geq N$ 都有 $|x_n - x_m| > \varepsilon$
- (D) $\exists \varepsilon > 0$, 使得 $\forall N \geq 1, \exists n \geq N$ 使得 $\forall p \geq 1$ 都有 $|x_n - x_{n+p}| > \varepsilon$
- (E) $\exists \varepsilon > 0$, 使得 $\forall N \geq 1, \forall n \geq N$ 及 $\forall p \geq 1$ 都有 $|x_n - x_{n+p}| > \varepsilon$
- (F) $\exists \varepsilon > 0$, 使得 $\forall N \geq 1, \exists n \geq N$ 且 $\exists p \geq 1$ 使得 $|x_n - x_{n+p}| > \varepsilon$
- (G) $\exists \varepsilon > 0$, 使得 $\forall N \geq 1, \exists n \geq N$ 且 $\exists p \geq 1$ 使得 $|x_n - x_{n+p}| \geq \varepsilon$

解 FG。Cauchy 数列的定义为 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall m > n \geq N, |x_m - x_n| < \varepsilon$, 取 $p = m - n$ 即可。 \square

例 2.2.5

单选题：分别回答以下条件是“ $\{x_n\}$ 是 Cauchy 数列”的什么条件。

- (1) _____ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$, 使得 $\forall n \geq N$ 都有 $|x_n - x_N| < \varepsilon$;
- (2) _____ $\exists C > 0$, 使得 $\forall n \geq 1$ 都有 $|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| \leq C$;
- (3) _____ $\exists \{b_n\} > 0$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$, 且 $\exists N \geq 0$ 使得 $\forall n \geq N$ 以及 $\forall p \geq 1$ 都有 $|x_{n+p} - x_n| \leq b_n$;
- (4) _____ $\forall n, p \geq 1, |x_{n+p} - x_n| < \frac{p}{n^2}$;
- (5) _____ $\forall n, p \geq 1, |x_{n+p} - x_n| < \frac{p}{n}$;
- (6) _____ $\forall p \geq 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{n+p} - x_n| = 0$ 。

- (A) 充分条件, 但非必要条件 (C) 充分必要条件
- (B) 必要条件, 但非充分条件 (D) 即非充分条件, 也非必要条件

解

(1) C。 \implies : $|x_m - x_n| \leq |x_m - x_N| + |x_N - x_n| < 2\varepsilon$ 。 \longleftarrow : 取 $(m, n) = (n, N)$ 。

(2) A。 \implies : 令 $a_n = x_{n+1} - x_n$, 则 $\sum_{k=1}^n a_k$ 绝对收敛, 从而收敛, 故 $\{x_n\}$ 收敛。 \nLeftarrow : 取 $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $x_1 = 0$, 此时 $x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k}$ 。

(3) C. \implies : 取 $N' = \max\{N, N_0\}$ 保证 $b_n < \varepsilon$ 即可. \impliedby : 取 $b_n = \sup_{p \geq 1} |x_{n+p} - x_n|$ 即可.

(4) A. \implies : $\forall n \geq 2, |x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, 则 $|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{n-1}$ ($\forall p \geq 1$). \nRightarrow : $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(5) D. \nRightarrow : $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. \nRightarrow : $x_{2n} = \frac{1}{2n}, x_{2n+1} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{\ln n}$.

(6) B. \nRightarrow : $x_n = \ln n, \sqrt{n}, \sin \ln n$. \impliedby : 取 $m = n + p$ 即可.

□

2.2.2 函数的连续性

例 2.2.6 (作业第 1 题)

设 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x)) = \infty$. 证明: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

证明 采用反证法, 假设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 不成立, 则 $\exists M_0 > 0$ 使得 $\forall n \geq 1, \exists x_n$ 满足 $|x_n| > n$ 且 $|f(x_n)| \leq M_0$. 由于连续函数 f 在有界闭区间 $[-M_0, M_0]$ 上有界, 即存在 $M > 0$ 使得 $|x| \leq M_0 \implies |f(x)| \leq M$. 故 $|f(f(x_n))| \leq M$, 与 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x)) = \infty$ 矛盾, 因此 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 成立. □

另证 假设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 不成立, 则 $\exists M_0 > 0$, 使得 $\forall n \geq 1, \exists x_n$ 满足 $|x_n| > n$ 且 $|f(x_n)| \leq M_0$. 故 $\{f(x_n)\}$ 有收敛子列, 不妨设 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 y_0 . 由于 f 是连续函数, 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(f(x_n)) = f(y_0)$, 与 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x)) = \infty$ 矛盾, 因此结论成立. □

例 2.2.7 (作业第 2 题)

设 $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$, 且存在数列 $\{x_n\} \subseteq [a, b]$ 满足 $g(x_n) = f(x_{n+1})$ ($\forall n \geq 1$). 证明: 存在 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) = g(x_0)$.

证明 采用反证法, 假设 $\forall x \in [a, b]$ 有 $f(x) \neq g(x)$, 由连续函数的介值性定理, 要么 $f(x) > g(x)$ 恒成立、要么 $f(x) < g(x)$ 恒成立. 不妨设 $\forall x \in [a, b], f(x) > g(x)$, 否则可以考虑 $-f, -g$, 则

$$g(x_n) = f(x_{n+1}) > g(x_{n+1}) = f(x_{n+2}) > \cdots \quad (2.2.4)$$

由于 g 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 故 g 在 $[a, b]$ 上有界, 从而 $\{g(x_n)\}$ 和 $\{f(x_n)\}$ 均为有界数列, 于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = L \quad (2.2.5)$$

又因为 $\{x_n\} \subseteq [a, b]$ 是有界数列, 其存在收敛子列. 设 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a, b]$, 由 f 与 g 的连续性分别得到 $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$ 与 $\lim_{k \rightarrow +\infty} g(x_{n_k}) = g(x_0)$, 故 $f(x_0) = g(x_0)$, 与假设矛盾. □

例 2.2.8 (作业第 3 题)

设 $f \in \mathcal{C}[a, +\infty)$ 且有界。证明：对任意 $\lambda > 0$ ，存在数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x_n + \lambda) - f(x_n)] = 0 \quad (2.2.6)$$

证明 要证明的结论等价于： $\forall \lambda > 0$ ，有

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x + \lambda) - f(x)| = 0 \quad (2.2.7)$$

采用反证法，假设 $\exists \lambda_0 > 0$ 使得 $\liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x + \lambda_0) - f(x)| > 0$ ，则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x + \lambda_0) - f(x)| > \varepsilon_0 \quad (2.2.8)$$

从而 $\exists N > 0$ 使得 $x \geq N \implies |f(x + \lambda_0) - f(x)| > \varepsilon_0$ 。由连续函数的介值性定理，要么 $x \geq N \implies f(x + \lambda_0) - f(x) \geq \varepsilon_0$ ，要么 $x \geq N \implies f(x + \lambda_0) - f(x) \leq -\varepsilon_0$ （两者必成立其一）。

不妨设 $x \geq N \implies f(x + \lambda_0) - f(x) \geq \varepsilon_0$ ，则 $\forall k \geq 1$ ， $f(N + (k+1)\lambda_0) - f(N + k\lambda_0) \geq \varepsilon_0$ ，累加得 $f(N + k\lambda_0) - f(N) \geq k\varepsilon_0$ ($\forall k \geq 1$)。当 $k \rightarrow +\infty$ 时， $k\varepsilon_0 \rightarrow +\infty$ ，这与 f 有界矛盾，故原命题成立。 \square

另证 分以下三种情况讨论。

1° 若 $\exists N > 0$ 使得 $x \geq N \implies f(x + \lambda) \geq f(x)$ ，令 $x_n = N + n\lambda$ ，则 $f(x_{n+1}) \geq f(x_n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)。又因为 $\{f(x_n)\}$ 有界，故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ 收敛，且满足

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x_{n+1}) - f(x_n)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x_n + \lambda) - f(x_n)] \quad (2.2.9)$$

2° 若 $\exists N > 0$ 使得 $x \geq N \implies f(x + \lambda) \leq f(x)$ ，则对 $-f$ 应用与 1° 相同的论证即可。

3° 若 $\forall n > a$ ， $\exists x_n \geq n$ 使得 $f(x_n + \lambda) < f(x_n)$ ，且 $\exists y_n \geq n$ 使得 $f(y_n + \lambda) > f(y_n)$ ，于是 $x_n \neq y_n$ 。由介值定理， $\exists z_n$ 介于 x_n, y_n 之间使得 $f(z_n + \lambda) = f(z_n)$ 。显然 $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = +\infty$ ，且 $f(z_n + \lambda) - f(z_n) = 0$ ，从而结论成立。

\square

例 2.2.9 (作业第 4 题)

证明：不存在定义在 \mathbb{R} 上的连续函数，使得每个函数值恰好被取到两次。

证明 采用反证法，假设存在连续函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得对任意 $y \in f(\mathbb{R})$ ，存在恰好两个不同的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 满足 $f(x_1) = f(x_2) = y$ 。设 $x_1 < x_2$ ，则连续函数 f 在有界闭区间 $[x_1, x_2]$ 上存在最小值 m 与最大值 M 。

由于 f 不是常值函数, 故 m 与 M 中至少有一个不等于 $f(x_1)$ 。不妨设 $M > f(x_1)$, 则存在 $x_3 \in (x_1, x_2)$ 使 $f(x_3) = M$ 。根据假设, 存在 $x_4 \neq x_3$ 使 $f(x_4) = M$ 。不妨设 $x_3 < x_4$, 否则可以考虑 $f(-x)$ 。

如图 2.2.1 所示, 若 $x_4 > x_2$, 考虑 $\eta = \frac{f(x_1)+M}{2}$, 由介值定理, η 在 (x_1, x_3) 、 (x_3, x_2) 与 (x_2, x_4) 内各至少取到一次, 与“每个函数值恰好取两次”矛盾。

若 $x_4 \in (x_3, x_2)$, 取 $x_5 \in (x_3, x_4)$, 则 $f(x_5) < M$ 。考虑 $\eta = \frac{\max\{f(x_5), f(x_1)\}+M}{2}$, 由介值定理, η 在 (x_1, x_3) 、 (x_3, x_5) 、 (x_5, x_4) 与 (x_4, x_2) 内各至少取到一次, 同样矛盾。故不存在这样的连续函数。□

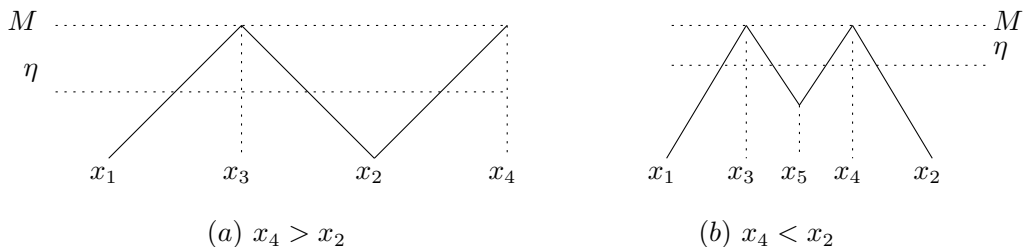


图 2.2.1: 作业第 4 题示意图

注 若将“两次”改为“ n 次”, 则结论改为: 不存在定义在 \mathbb{R} 上的连续函数, 使得每个函数值恰好被取到偶数次; 而存在定义在 \mathbb{R} 上的连续函数, 使得每个函数值恰好被取到奇数次。

对于奇数次 $n (> 1)$ 的情形, 可以考虑 $f(x) = x + a \sin x$ (其中 $a > 1$), 容易证明 f 在每个 $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$ 区间上都有两个极值点 x_{2k}, x_{2k+1} , 它们满足

$$f'(x) = 1 + a \cos x = 0 \implies x_{2k} = (2k+1)\pi - \arccos \frac{1}{a}, \quad x_{2k+1} = (2k+1)\pi + \arccos \frac{1}{a} \quad (2.2.10)$$

选择合适的 a 使得 $f(x_0) = f(x_n)$, 其中 $x_0 = \pi - \arccos \frac{1}{a}$ 、 $x_n = n\pi + \arccos \frac{1}{a}$, 亦即

$$\pi - \arccos \frac{1}{a} + a \sin \left(\pi - \arccos \frac{1}{a} \right) = n\pi + \arccos \frac{1}{a} + a \sin \left(n\pi + \arccos \frac{1}{a} \right) \quad (2.2.11)$$

由于 $(-1)^n = -1$ 、 $\sin \arccos x = \sqrt{1-x^2}$, 故上式可化简为

$$\sqrt{a^2-1} - \arccos \frac{1}{a} = \frac{n-1}{2}\pi \quad (2.2.12)$$

例 2.2.10 (作业第 5 题)

设 $f \in \mathcal{C}(a, b)$, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ 、 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$; $g \in \mathcal{C}(a, b)$ 满足 $g(x) = o(f(x))$ (当 $x \rightarrow a^+$ 与 $x \rightarrow b^-$ 时)。证明: $F(x) = f(x) + g(x)$ 在 (a, b) 内有零点。

证明 由 $g(x) = o(f(x))$ 可知, 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x \in (a, a + \delta) \cup (b - \delta, b)$, 有 $|g(x)| < \frac{1}{2}|f(x)|$ 。当 $x \in (a, a + \delta)$ 时, $f(x) > 0$, 故

$$F(x) = f(x) + g(x) > f(x) - \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}f(x) > 0 \quad (2.2.13)$$

当 $x \in (b - \delta, b)$ 时, $f(x) < 0$, 故

$$F(x) = f(x) + g(x) < f(x) + \frac{1}{2}|f(x)| = \frac{1}{2}f(x) < 0 \quad (2.2.14)$$

由于 $F \in \mathcal{C}(a, b)$, 根据介值定理, 存在 $x_0 \in (a, b)$ 使 $F(x_0) = 0$, 即 $F(x)$ 在 (a, b) 内有零点。□

例 2.2.11 (作业第 6 题)

设 $f \in \mathcal{C}(a, b)$, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$; $g \in \mathcal{C}(a, b)$ 满足 $g(x) = o(f(x))$ (当 $x \rightarrow a^+$ 与 $x \rightarrow b^-$ 时)。证明: $F(x) = f(x) + g(x)$ 在 (a, b) 内有最小值。

证明 任取 $x_0 \in (a, b)$ 。当 $x \rightarrow a^+$ 或 $x \rightarrow b^-$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 故 $F(x) = f(x)[1 + o(1)] \rightarrow +\infty$; 因此 $\exists \delta \in (0, \min\{x_0 - a, b - x_0\})$, 使得 $\forall x \in (a, a + \delta) \cup (b - \delta, b)$, 有 $F(x) > F(x_0)$ 。连续函数 F 在有界闭区间 $[a + \frac{\delta}{2}, b - \frac{\delta}{2}] \subset (a, b)$ 上存在最小值 m , 即存在 $\xi \in [a + \frac{\delta}{2}, b - \frac{\delta}{2}]$ 使 $F(\xi) = m$, 并且

$$m = F(\xi) \leq F(x_0) < F(x), \quad \forall x \in (a, a + \delta) \cup (b - \delta, b) \quad (2.2.15)$$

故 m 是 $F(x)$ 在 (a, b) 内的最小值。□

例 2.2.12 (作业第 7 题)

设 I 是区间, $f_n \in \mathcal{C}(I)$ (对任意 $n \geq 1$), 且满足 $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ (对任意 $x \in I$ 与 $n \geq 1$), 并且数列 $\{f_n(x)\}$ 对任意 $x \in I$ 有下界。记 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ (对任意 $x \in I$)。证明:

- (1) f 在 I 上上半连续, 即对任意 $x_0 \in I$ 与 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_\varepsilon > 0$ 使得对任意 $x \in I$, 若 $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, 则 $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ 。
- (2) 若 I 是有界闭集, 则 f 在 I 上有最大值。
- (3) 存在上半连续但不连续的函数。

证明 (1) $\forall x_0 \in I$ 与 $\varepsilon > 0$, 由于 $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0)$, 故 $\exists N_\varepsilon > 0$ 使得 $\forall n \geq N_\varepsilon$, 有 $f_n(x_0) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$ 。由于 $f_{N_\varepsilon} \in \mathcal{C}(I)$, 对上述 ε , 存在 $\delta_{\varepsilon, N_\varepsilon} > 0$ 使得 $\forall x \in I$, $|x - x_0| < \delta_{\varepsilon, N_\varepsilon} \implies f_{N_\varepsilon}(x) < f_{N_\varepsilon}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$ 。又因 $f_n(x)$ 单调递减, 故 $f(x) = \lim_{p \rightarrow +\infty} f_{N_\varepsilon + p}(x) \leq f_{N_\varepsilon}(x)$, 于是

$$f(x) \leq f_{N_\varepsilon}(x) < f_{N_\varepsilon}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x_0) + \varepsilon \quad (2.2.16)$$

即 f 在 x_0 处上半连续, 由 x_0 的任意性, f 在 I 上半连续。

(2) 先证 f 在 I 上有上界。采用反证法, 假设 f 在 I 上无上界, 则 $\forall n \geq 1, \exists x_n \in I$ 使 $f(x_n) > n$ 。由于 I 是有界闭区间, $\{x_n\}$ 存在收敛子列, 不妨设 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \in I$, 故 $\forall \delta > 0, \exists N > 0$ 使得 $n > N \implies |x_n - x_0| < \delta$ 。由 f 的上半连续性, 取 $\varepsilon = 1, \exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in I, |x - x_0| < \delta \implies f(x) < f(x_0) + 1$, 于是 $f(x_n) < f(x_0) + 1$,

从而

$$n < f(x_n) < f(x_0) + 1, \quad \forall n > N \quad (2.2.17)$$

于是 $f(x_0) + N$ 成为自然数集 \mathbb{N} 的上界, 与阿基米德性质矛盾。故 f 在 I 上有上界, 设上确界为 M 。

下证 M 为 f 在 I 上的最大函数值。 $\forall n \geq 1, \exists x_n \in I$ 使 $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$ 。同理不妨设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \in I$, 故 $\forall \delta > 0, \exists N > 0$ 使得 $n > N \implies |x_n - x_0| < \delta$ 。由上半连续性, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in I, |x - x_0| < \delta \implies f(x) < f(x_0) + \varepsilon$; 于是 $f(x_n) < f(x_0) + \varepsilon$, 故 $M - \frac{1}{n} < f(x_n) < f(x_0) + \varepsilon$, 从而 $M \leq f(x_0) + \varepsilon + \frac{1}{n}$ 。由 ε 与 n 的任意性, $M \leq f(x_0)$ 。又因为 M 是上确界, 故 $f(x_0) \leq M$, 从而 $f(x_0) = M$, 即 M 为 f 在 I 上的最大值。

(3) 举例: 设 $I = [0, 1], f_n(x) = x^n$, 则

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad (2.2.18)$$

是上半连续但不连续的函数。 □

例 2.2.13 (作业第 8 题)

设 f 在区间 I 上可导, 即 $\forall x \in I$, 极限

$$f'(x) := \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad (2.2.19)$$

存在。证明: 若 $\forall x \in I$, 都有 $f'(x) > 0$, 则 f 在区间 I 上严格增。

证明 记 $g(x, y) := \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ 。假设 $\exists x_1, y_1 \in I$ 使得 $x_1 < y_1$ 且 $f(x_1) \geq f(y_1)$ 。采用以下方法构造 $\{x_n\}, \{y_n\}$:

- 若 $g(x_n, \frac{x_n + y_n}{2}) \leq g(x_n, y_n)$, 则令 $x_{n+1} = x_n, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ 。
- 若 $g(x_n, \frac{x_n + y_n}{2}) > g(x_n, y_n)$, 则必然有 $g(\frac{x_n + y_n}{2}, y_n) \leq g(x_n, y_n)$, 令 $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, y_{n+1} = y_n$ 。

如此可得有界闭区间套 $[x_n, y_n]$, 满足

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{y_n - x_n}{2}, \quad g(x_{n+1}, y_{n+1}) \leq g(x_n, y_n) \quad (2.2.20)$$

由有界闭区间套定理, 存在唯一实数 $x_0 \in I$ 满足 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $x_0 \in [x_n, y_n]$ 。由于区间长度不为 0, 必然存在 x_n, y_n 之一 (记为 a_n) 满足 $a_n \neq x_0$ 且 $g(a_n, x_0) \leq g(x_n, y_n)$, 因此

$$g(a_n, x_0) \leq g(x_n, y_n) \leq g(x_1, y_1) \quad (2.2.21)$$

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0$, 令上述不等式两边 $n \rightarrow +\infty$, 得到

$$f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(a_n, x_0) \leq g(x_1, y_1) < 0 \quad (2.2.22)$$

这与 $f'(x_0) > 0$ 矛盾。因此 f 在 I 上严格增。 □

注 构造数列的过程可以形象地用下面这张图表示，相当于不断找 g (斜率) 的最小值点。

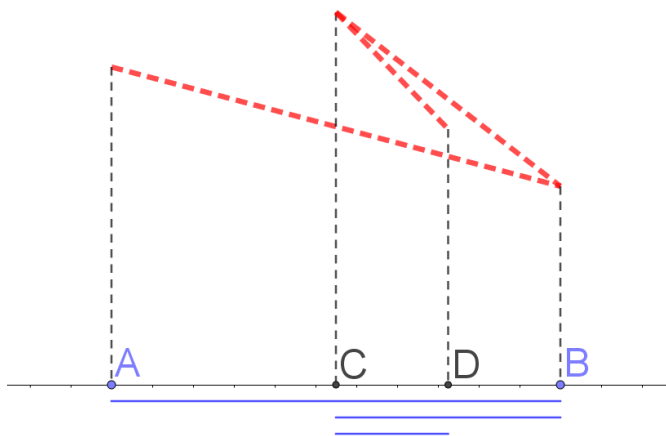


图 2.2.2: 构造数列的过程

2.3 雨课堂作业

2.3.1 函数极限 (小 o)

例 2.3.1 (作业第 1, 2, 3, 4, 5 题)

填空题: 计算以下极限。

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - x^{-\frac{1}{x(x+a)}} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - \tan x)^{-2/x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2^{x+1}}{3} \right)^{3/x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 2x + 2x^2 \cos(1/x)}{(1 + \cos x) \ln(1+x)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

解 (1) 令 $y = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$, 代入计算可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{y} \left(e^{(1+y) \ln(1+ay)} - e^{\frac{y}{a+\frac{1}{y}} \ln y} \right) = \frac{1}{y} \left(e^{ay(1+y)(1+o(1))} - e^{\frac{y^2 \ln y}{1+ay}} \right) \\ & = \frac{1}{y} (1 + ay + o(y) - 1 - y^2 \ln y + o(y^2 \ln y)) = a + o(1) \rightarrow a \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

(2)

$$\begin{aligned} & \sqrt{1+x} - \tan x = 1 + \frac{x}{2} + o(x) - x - o(x) = 1 - \frac{x}{2} + o(x) \\ & -\frac{2}{x} \ln \left(1 - \frac{x}{2} + o(x) \right) = -\frac{2}{x} \left(-\frac{x}{2} + o(x) \right) = 1 + o(1) \rightarrow 1 \\ & (\sqrt{1+x} - \tan x)^{-2/x} = \exp \left[-\frac{2}{x} \ln (\sqrt{1+x} - \tan x) \right] \rightarrow e \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

(3) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2^{x+1} = 2e^{x \ln 2} = 2(1 + x \ln 2 + o(x))$, 因此

$$\begin{aligned} & \frac{1 + 2^{x+1}}{3} = 1 + \frac{2 \ln 2}{3} x + o(x) \\ & \ln \left(1 + \frac{2 \ln 2}{3} x + o(x) \right) = \frac{2 \ln 2}{3} x + o(x) \\ & \frac{3}{x} \ln \left(1 + \frac{2 \ln 2}{3} x + o(x) \right) = 2 \ln 2 + o(1) \\ & \left(\frac{1 + 2^{x+1}}{3} \right)^{3/x} = \exp \left[\frac{3}{x} \ln \left(\frac{1 + 2^{x+1}}{3} \right) \right] \rightarrow 4 \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

(4) 令 $y = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$, 代入计算可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{y} \ln(\cos y + \sin y) = \frac{1}{y} \ln(1 + o(y) + y + o(y)) = \frac{y + o(y)}{y} \rightarrow 1 \\ & (\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x})^x = \exp \left[x \ln (\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}) \right] \rightarrow e \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

(5) 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} & \ln(1+x) = x + o(x) = x(1 + o(1)) \\ & 2x^2 \cos \frac{1}{x} = O(x^2) = o(x) = x o(1) \\ & \sin 2x = 2x + o(2x) = 2x(1 + o(1)) \\ & \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x(1 + o(1)) + x o(1)}{(2 + o(1))x(1 + o(1))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + o(1)}{2 + o(1)} = 3 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

□

注

(1) 对 $u(x)^{v(x)}$ 型的函数, 建议统一换底为 e , 即写成基本初等函数复合 $e^{v(x) \ln u(x)}$ 。

(2) 及早换元, 简化函数形式。

(3) 在处理等价无穷小时, 建议保留携带 o 余项的形式, 即 $f(x) \sim g(x)$ 时, 用 $f(x) = g(x) + o(g(x))$ 替换 $f(x)$, 而不是用 $g(x)$ 替换 $f(x)$ 。

例 2.3.2 (作业第 6 题)

计算极限: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$ 。

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[3]{1+x} - 1 = \frac{x}{3} + o(x)$ 。当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 对任意 $k = 1, 2, \dots, n$, $0 < \frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n}$, 所以 $\frac{k}{n^2} = O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$ 。代入计算可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{3n^2} + o\left(\frac{k}{n^2}\right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n(n+1)}{6n^2} + n \cdot o\left(\frac{1}{n}\right) \right] = \frac{1}{6} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

上述解答对吗?

解 错误。错误发生在 (4) \implies (5), 求和中的 n 个 $o(1/n)$ 是不同的, 所以把和写成 $n \cdot o(1/n)$ 是不妥的。可以构造无穷多个数列 $a_n^{(k)} (k = 1, 2, \dots)$, 使得对每个正整数 k , 数列 $a_n^{(k)} = o(1/n)$, 但数列 $a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \dots + a_n^{(n)}$ 不是无穷小。例如:

$$a_n^{(k)} = \begin{cases} k, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases} \quad (2.3.7)$$

□

例 2.3.3 (作业第 7, 8 题)

已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\tan x}\right)}{2^x - 1} = 1$ 。求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ 。

解一

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\tan x}\right)}{x \ln 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{\tan x}}{x \ln 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 \ln 2} \quad (2.3.8)$$

因此所求极限为 $\ln 2$ 。

解二 设 $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$, 则 $f(x) = Ax^2 + o(x^2)$, 故有

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{Ax^2}{\tan x}\right)}{2^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + Ax)}{2^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Ax}{2^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Ax}{x \ln 2} = \frac{A}{\ln 2} \quad (2.3.9)$$

所以 $A = \ln 2$ 。

上述解答对吗?

解 错误。解一需要先论证 $\frac{f(x)}{\tan x}$ 是无穷小, 解二不能事先默认极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ 存在。正确的解答如下:

根据极限的定义可得: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_0 > 0$ 使得

$$|x| < \delta_0 \implies \left| \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\tan x}\right)}{2^x - 1} - 1 \right| < \varepsilon \quad (2.3.10)$$

凑出 $\frac{f(x)}{x^2}$ 可得

$$\frac{e^{(1-\varepsilon)(2^x-1)} - 1}{x^2} \tan x < \frac{f(x)}{x^2} < \frac{e^{(1+\varepsilon)(2^x-1)} - 1}{x^2} \tan x \quad (2.3.11)$$

利用极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{A(2^x-1)} - 1}{x^2} \tan x = A \ln 2 \quad (2.3.12)$$

故 $\exists \delta_1 > 0$ 使得

$$|x| < \delta_1 \implies \left| \frac{e^{A(2^x-1)} - 1}{x^2} \tan x - A \ln 2 \right| < \varepsilon \quad (2.3.13)$$

代入计算可得

$$\ln 2 - 2\varepsilon < (1 - \varepsilon) \ln 2 - \varepsilon < \frac{f(x)}{x^2} < (1 + \varepsilon) \ln 2 + \varepsilon < \ln 2 + 2\varepsilon \quad (2.3.14)$$

取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, 则当 $|x| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{f(x)}{x^2} - \ln 2 \right| < 2\varepsilon \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \ln 2 \quad (2.3.15)$$

□

2.4 补充习题

2.4.1 有界闭区间套

例 2.4.1

设 $0 < \lambda < 1$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} = (1 - \lambda)x_n + \lambda x_{n+1}$. 证明 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求它的值。

证明 不妨设 $a \leq b$, 否则可以考虑 $y_n = -x_n$. 用数学归纳法可以证明

$$x_{2n-1} \leq x_{2n+1} \leq x_{2n+2} \leq x_{2n} \quad (2.4.1)$$

于是 $[x_{2n-1}, x_{2n}]$ 构成有界闭区间套, 从而 $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n-1}$, $\beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n}$ 存在. 令 $n \rightarrow +\infty$, 则有 $\beta = (1 - \lambda)\beta + \lambda\alpha$, 即 $\alpha = \beta$. 因此 $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

注意到

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 - \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \lambda - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.4.2)$$

因此

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\begin{pmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \lambda - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right]^n \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \lambda - 1 \end{pmatrix} \right]^n \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \frac{b + (1 - \lambda)a}{2 - \lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

即

$$\alpha = \frac{b + (1 - \lambda)a}{2 - \lambda} \quad (2.4.4)$$

□

2.4.2 Cauchy 准则

例 2.4.2

压缩不动点定理。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是闭集, $f: I \rightarrow I$ 是压缩映射, 即存在常数 $\lambda \in (0, 1)$ 使得 $\forall x, y \in I$, 都有 $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$ 。证明: 存在唯一的 $x^* \in I$ 使得 $f(x^*) = x^*$, 并且 $\forall x_0 \in I$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x_0) = x^*$, 且

$$|x_n - x^*| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |f(x_0) - x_0| \quad (2.4.5)$$

证明 记 $x_n = f^{(n)}(x_0)$ 。若 $x_1 = f(x_0) = x_0$, 则命题显然成立。若 $x_1 = f(x_0) \neq x_0$, 则

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq \lambda|x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq \lambda^n|x_1 - x_0| \quad (2.4.6)$$

从而 $\forall \varepsilon > 0$, 取特定 $N > 0$, 使得 $\forall m > n > N$, 有

$$|x_m - x_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1} - x_k| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k |x_1 - x_0| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_1 - x_0| < \frac{\lambda^N}{1 - \lambda} |x_1 - x_0| \stackrel{?}{<} \varepsilon \quad (**)$$

取

$$N = \left\lceil \log_{\lambda} \frac{\varepsilon(1 - \lambda)}{|x_1 - x_0|} \right\rceil + 1 \quad (2.4.7)$$

即可。所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 数列, 于是 $x^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在。

在 (*) 中令 $m \rightarrow +\infty$ 可得

$$|x_n - x^*| = \lim_{m \rightarrow +\infty} |x_m - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_1 - x_0| \quad (2.4.8)$$

易见 f 连续, 因此

$$f(x^*) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = x^* \quad (2.4.9)$$

设 $x^*, x^\#$ 均为 f 的不动点, 则

$$|x^* - x^\#| = |f(x^*) - f(x^\#)| \leq \lambda|x^* - x^\#| < |x^* - x^\#| \quad (2.4.10)$$

即 $x^* = x^\#$, 故不动点唯一。 \square

例 2.4.3

用压缩不动点定理证明例 1.5.25。

证明 令

$$f(y) := \frac{y}{2} + \frac{x}{2y} \quad (2.4.11)$$

记 $I \subseteq [\sqrt{x}, +\infty)$, 由 AM-GM 不等式可得 $f(I) \subseteq I$, 且 $\forall y_1, y_2 \in I$, 都有

$$|f(y_1) - f(y_2)| = \left| \frac{y_1 - y_2}{2} - \frac{x(y_1 - y_2)}{2y_1y_2} \right| \leq \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{x}{y_1y_2} \right| |y_1 - y_2| \leq \frac{1}{2} |y_1 - y_2| \quad (2.4.12)$$

因此 f 是压缩映射, 故 f 有唯一不动点 $y^* = \sqrt{x}$, 且 $\forall y_0 > 0$, $y_n = f^{(n)}(y_0) \rightarrow \sqrt{x}$. \square

例 2.4.4

设 $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$, 用压缩不动点定理证明例 1.5.26。

证明 当 $x = 0$ 时, 命题显然成立。故设 $0 < x \leq 1$ 。令

$$f(y) := y + \lambda(x - y^2) \quad (2.4.13)$$

记 $I \subseteq [0, \sqrt{x}]$, 则 $\forall x \in I$, 都有

$$\sqrt{x} - f(y) = (\sqrt{x} - y) [1 - \lambda(\sqrt{x} + y)] \geq 0 \quad (2.4.14)$$

故 $f(I) \subseteq I$ 。 $\forall y_1, y_2 \in I$, 都有

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |y_1 - y_2 - \lambda(y_1^2 - y_2^2)| \leq |y_1 - y_2| |1 - \lambda(y_1 + y_2)| \leq (1 - \sqrt{x}) |y_1 - y_2| \quad (2.4.15)$$

因此 f 是压缩映射, 故 f 有唯一不动点 $y^* = \sqrt{x}$, 且 $\forall y_0 > 0$, $y_n = f^{(n)}(y_0) \rightarrow \sqrt{x}$. \square

例 2.4.5

设 $0 < \lambda < 1$, $y_0 > 0$, $y_{n+1} = \frac{1-\lambda}{y_n} + \lambda$ 。证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ 存在, 并求其值。

证明 令

$$f(y) := \frac{1-\lambda}{y} + \lambda \quad (2.4.16)$$

记 $I \subseteq [\lambda, +\infty)$, 显然 $f(I) \subseteq I$, 且 $\forall y_1, y_2 \in I$, 都有

$$|f(y_1) - f(y_2)| = \left| \frac{1-\lambda}{y_1} - \frac{1-\lambda}{y_2} \right| \leq \frac{1-\lambda}{\lambda^2} |y_1 - y_2| \quad (2.4.17)$$

并不能保证 f 是压缩映射, 故我们考虑

$$f^{(2)}(y) = f\left(\frac{1-\lambda}{y} + \lambda\right) = \frac{1-\lambda}{\frac{1-\lambda}{y} + \lambda} + \lambda = \frac{(1-\lambda)y}{1-\lambda + \lambda y} + \lambda \quad (2.4.18)$$

此时

$$|f^{(2)}(y_1) - f^{(2)}(y_2)| = \frac{(1-\lambda)^2 |y_1 - y_2|}{(1-\lambda + \lambda y_1)(1-\lambda + \lambda y_2)} \leq \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda + \lambda^2}\right)^2 |y_1 - y_2| \quad (2.4.19)$$

因此 $f^{(2)}$ 是压缩映射, 故 $f^{(2)}$ 有唯一不动点 $y^* = 1$ 。因此

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(2n+1)} = f \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(2n)} \right) = f(y^*) = 1 \quad (2.4.20)$$

于是 $\forall y_0 > 0, \{y_n\}_{n \geq 1} \subseteq I$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(n)}(y_0) = 1 \quad (2.4.21)$$

□

另解 直接求出 $\{x_n\}$ 的通项。 □

例 2.4.6

每一种收敛都对应一种 Cauchy 准则。试写出 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 收敛所对应的 Cauchy 准则, 并给予证明。

证明 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall x, y \in I$,

$$0 < |x - a| < \delta \wedge 0 < |y - a| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad (2.4.22)$$

必要性显然, 因为

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |f(y) - A| < 2\varepsilon \quad (2.4.23)$$

充分性: 任取 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ 且 $x_n \neq a$, 则 $\forall \varepsilon' = \delta > 0, \exists N > 0$ 使得 $\forall m > n > N$, 都有 $0 < |x_m - a| < \delta$ 且 $0 < |x_n - a| < \delta$, 因此 $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$, 即 $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 数列, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) =: A$ 存在。令不等式中的 $m \rightarrow +\infty$ 可得 $|f(x_n) - A| \leq \varepsilon$, 因此 $\forall x \in I$,

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - A| < 2\varepsilon \quad (2.4.24)$$

所以 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 。 □

例 2.4.7

设 $I \subseteq \mathbb{R}, f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 证明: f 在 I 上连续且所有间断点都是可去间断点当且仅当对于 I 中的任意 Cauchy 数列 $\{x_n\}, \{f(x_n)\}$ 都是 Cauchy 数列。

证明 必要性: 设 $\{x_n\}$ 为 I 中的 Cauchy 数列, 但 $f(x_n)$ 不是 Cauchy 数列, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 记为 x_0 。若 $x_0 \in I$, 则 f 在 x_0 处连续, 此时 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0)$, 这与假设矛盾。若 $x_0 \notin I$, 则 x_0 是 f 的可去间断点且 $x_n \neq x_0$, 此时 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 这也与假设矛盾。

充分性: 设 x_0 为 I 的聚点, 且满足 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在。则 $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in I$, 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 且 $0 < |y - x_0| < \delta$, 但 $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ 。取 $\delta = \frac{1}{n}$, 则 $\exists x_{2n-1}, x_{2n} \in I$, 使得 $0 < |x_{2n-1} - x_0| < \frac{1}{n}$ 且

$0 < |x_{2n} - x_0| < \frac{1}{n}$, 但 $|f(x_{2n-1}) - f(x_{2n})| \geq \varepsilon$, 因此 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 数列, 但 $\{f(x_n)\}$ 不是 Cauchy 数列, 这与假设矛盾。

因此对 I 的任何聚点 x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在。若 $x_0 \notin I$, 则 x_0 是 f 的可去间断点。若 $x_0 \in I$, 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, 则取 $y_{2n-1} = x_0$, $y_{2n} \in I$ 满足 $0 < |y_{2n} - x_0| < \frac{1}{n}$, 则 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 数列, 但 $\{f(y_n)\}$ 不是 Cauchy 数列, 这与假设矛盾。因此 f 在 I 上连续。□

例 2.4.8

证明数列

$$a_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad (2.4.25)$$

收敛, 并证明其极限为 $e := \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ 。

证明 显然 $\{a_n\}$ 严格增, 且有上界

$$a_n \leq 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 3 - \frac{1}{n} < 3 \quad (2.4.26)$$

即 $\{a_n\}$ 单调增且有上界, 故收敛。

下证其极限为 e 。记 $b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, 则 $e := \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ 。注意到

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = a_n \implies e \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad (2.4.27)$$

同时

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \geq \sum_{k=0}^N \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \implies e \geq a_N \implies e \geq \lim_{N \rightarrow +\infty} a_N \quad (2.4.28)$$

因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e$ 。□

例 2.4.9 (基于级数定义指数函数)

$\forall z \in \mathbb{C}$, 定义

$$E_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!} \quad (2.4.29)$$

证明:

(1) $E_n(z)$ 关于 n 是 Cauchy 列, 从而存在极限 $E(z) := \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(z)$ 。

(2) $\forall z, w \in \mathbb{C}$, 对充分大的 n , 有

$$\begin{aligned} |E_{2n+1}(z)E_{2n+1}(w) - E_{2n+1}(z+w)| &\leq E_{n+1}(|z|)|E_{2n+1}(|w|) - E_{n+1}(|w|)| \\ &\quad + E_{n+1}(|w|)|E_{2n+1}(|z|) - E_{n+1}(|z|)| \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

从而 $E(z+w) = E(z)E(w)$ 。

(3) $\forall z$ 满足 $|z| < 1$, $|E(z) - 1| < 2|z|$ 。

(4) $E(z)$ 对 $z \in \mathbb{C}$ 连续。

(5) $E(1) = e$ 。

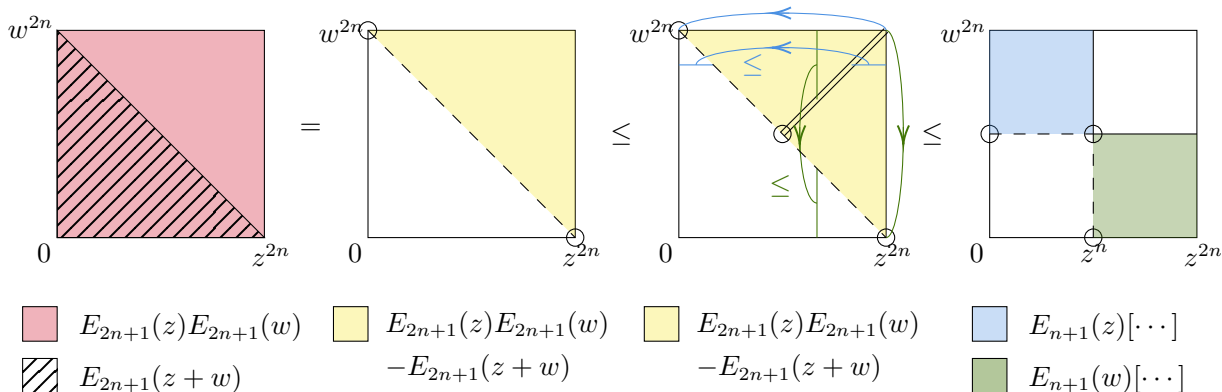


图 2.4.1: 证明过程 (2) 的示意图

证明 (1) $\forall \varepsilon > 0$, 取特定 $N > |z|$, 使得 $\forall m > n > N$, 都有

$$\begin{aligned}
 |E_m(z) - E_n(z)| &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{|z|^k}{k!} = \frac{|z|^n}{(n-1)!} \left[\frac{1}{n} + |z| \sum_{k=n+1}^{m-1} \frac{|z|^{k-1-n}}{n(n+1)\cdots(k-2)(k-1)k} \right] \\
 &< \frac{|z|^n}{(n-1)!} \left[\frac{1}{n} + |z| \sum_{k=n+1}^{m-1} \frac{1}{(k-1)k} \right] < \frac{|z|^n(1+|z|)}{n!} \stackrel{?}{<} \varepsilon
 \end{aligned} \tag{2.4.31}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|^n}{n!} = 0$, 故 N 可取到, 即 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列, 故收敛。

(2) 本题需要仔细观察等式左右两侧的关系, 如图 2.4.1 所示。此图由 $(2n+1)^2$ 个格点构成, 点 (k, l) 表示求和项 $\frac{z^k w^l}{k! l!}$ 。注意到

$$E_{2n+1}(z)E_{2n+1}(w) = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{l=0}^{2n} \frac{z^k w^l}{k! l!}, \quad E_{2n+1}(z+w) = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{l=0}^k \frac{z^l w^{k-l}}{l!(k-l)!} \tag{2.4.32}$$

即 $E_{2n+1}(z)E_{2n+1}(w)$ 为红色区域, $E_{2n+1}(z+w)$ 为斜线区域, LHS (=两者之差) 即为黄色区域, 虚线和圆圈表示不包含此点。

不妨设 $z, w \in \mathbb{R}^+$, 则图中第一个不等号显然成立, 因为双实线上的求和项被计算了两次。对于第二个不

等号, 我们需要依此证明蓝色和绿色箭头对应的不等式成立, 亦即

$$\begin{aligned} \frac{z^k}{k!} &\geq \frac{z^{k+l}}{(k+l)!}, & 0 \leq k \leq 2n-l < n < l \leq 2n \\ \frac{w^l}{l!} &\geq \frac{w^{l+k}}{(l+k)!}, & 0 \leq l \leq 2n-k < n < k \leq 2n \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

这两个不等式本质相同, 故我们只证明第一个: 给定正数 z , 对充分大的 n 和任意 k, l , 有

$$z^l \leq \frac{(k+l)!}{k!}, \quad 0 \leq k \leq 2n-l < n < l \leq 2n \quad (2.4.34)$$

只需注意到

$$\frac{z^l}{l!} \stackrel{?}{\leq} 1 \leq \binom{k+l}{l} = \frac{(k+l)!}{k! l!} \quad (2.4.35)$$

由 (1) 知 $\exists N(z) > 0$ 使得 $l > N \implies \frac{z^l}{l!} < 1$. 取 $n \geq N$ 即可。

因此 $\forall n > N(z, w)$, 蓝色和绿色箭头对应的不等式成立, 从而第二个不等号成立, 最终得到的蓝色区域与绿色区域之和即为 RHS. 当 $z, w \in \mathbb{C}$ 时, 采用三角不等式放缩, 上述不等号仍然成立, 故原不等式成立。

令 $n \rightarrow +\infty$ 可得

$$E(z+w) = E(z)E(w) \quad (2.4.36)$$

(3)(4) 与例 1.5.31(6) 类似。

(5) 见例 2.4.8. □

例 2.4.10

考虑以下递进的三个问题:

- (1) 设数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 满足: $\forall n, p \in \mathbb{N}$, 都有 $|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{p}{n^2}$. 问 $\{x_n\}$ 是否收敛?
- (2) 设数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 满足: $\forall n, p \in \mathbb{N}$, 都有 $|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{p}{n^{1+\beta}}$, 其中 $\beta > 0$. 问 $\{x_n\}$ 是否收敛?
- (3) 设数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 满足: $\forall n, p \in \mathbb{N}$, 都有 $|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{p}{n}$. 问 $\{x_n\}$ 是否收敛?

证明 (1)(2) 收敛。只需证明存在 $\gamma > 0$ 使得

$$\frac{1}{n^{1+\beta}} < \frac{1}{(n-1)^\gamma} - \frac{1}{n^\gamma} \quad (2.4.37)$$

为此, 计算

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{-(1+\beta)}}{(n-1)^{-\gamma} - n^{-\gamma}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\beta-\gamma}} \frac{(1-\frac{1}{n})^\gamma \frac{1}{n}}{1 - (1-\frac{1}{n})^\gamma} = \frac{1}{\beta}, \quad \gamma = \beta \quad (2.4.38)$$

故存在 $N > 0$ 使得 $\forall n \geq N$, 都有

$$\frac{1}{n^{1+\beta}} < \frac{2}{\beta} \left[\frac{1}{(n-1)^\beta} - \frac{1}{n^\beta} \right] \quad (2.4.39)$$

从而 $\forall n \geq N$ 以及 $\forall p \in \mathbb{N}^*$, 都有

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq \sum_{k=0}^{p-1} |x_{n+k+1} - x_{n+k}| \leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{(n+k)^{1+\beta}} \\ &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{2}{\beta} \left[\frac{1}{(n+k-1)^\beta} - \frac{1}{(n+k)^\beta} \right] \leq \frac{2}{\beta(n-1)^\beta} \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

(1) 是 (2) 的一个特例, 即

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (2.4.41)$$

(3) $\{x_n\}$ 可能发散。注意到

$$\ln(n+p) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{p}{n}\right) < \frac{p}{n} \quad (2.4.42)$$

令 $x_n = \ln n$, 则 $|x_{n+p} - x_n| < \frac{p}{n}$ 满足题设, 显然 $\{x_n\}$ 发散。 \square

2.5 讲义习题

2.5.1 实数的连续性

例 2.5.1 (习题 3.1.6 节选)

(1) 设 f 在区间 $[a, b]$ 上定义, 记

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2.5.1)$$

证明: $\exists x_0 \in [a, b]$ 和 $\{x_n\} \subseteq [a, b]$, 满足 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $x_n \neq x_0$ 、 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ 且 $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geq \lambda$ 。

(2) 设 f 在区间 I 上满足: $\forall x_0 \in I$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, 证明: f 在区间 I 上严格增。

(3) 设 f 在区间 I 上满足: $\forall x_0 \in I$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, 证明: f 在区间 I 上单调不减。

证明 参考例 2.2.13。 \square

2.5.2 应用：迭代与不动点

例 2.5.2 (习题 3.2.5)

任取 $x_0 \geq -1$, 记 $x_n = \sqrt{\frac{1+x_{n-1}}{2}}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

(1) 证明: $\{x_n\}$ 收敛。

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n(1-x_n)$ 。

(3) 设 $y_n = 2y_{n-1}^2 - 1$, 其中 $-1 \leq y_0 \leq 1$, $\{y_n\}$ 是否收敛?

解 (1) 当 $x_0 \neq 1$ 时, 显然当 $n \geq 1$ 时, $x_n \geq 0$ 。可以归纳证明

$$x_n \geq 1 \Leftrightarrow x_1 \geq 1, \quad n \geq 1 \quad (2.5.2)$$

故有

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 = \frac{1+x_{n-1}-2x_{n-1}^2}{2} = \frac{(1+2x_{n-1})(1-x_{n-1})}{2} \geq 0, \quad x_1 \leq 1 \quad (2.5.3)$$

故 $\{x_n\}$ 单调有界, 从而收敛。

(2) 当 $x_0 \in [-1, 1]$ 时, 有 $0 \leq x_n \leq 1$, 故可设 $\theta_n = \arccos x_n$, 则有

$$\theta_n = \frac{\theta_{n-1}}{2} \implies \theta_n = \frac{\theta_0}{2^n} \implies x_n = \cos \frac{\arccos x_0}{2^n} \quad (2.5.4)$$

当 $x_0 > 1$ 时, 有 $x_n > 1$, 故可设 $\theta_n = \cosh^{-1} x_n = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, 则有

$$\theta_n = \frac{\theta_{n-1}}{2} \implies \theta_n = \frac{\theta_0}{2^n} \implies x_n = \cosh \frac{\cosh^{-1} x_0}{2^n} \quad (2.5.5)$$

注意到

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

故有

$$4^n(1-x_n) = \begin{cases} 4^n(1 - \cos \frac{\arccos x_0}{2^n}) \rightarrow \frac{1}{2}(\arccos x_0)^2, & x_0 \in [-1, 1] \\ 4^n(1 - \cosh \frac{\cosh^{-1} x_0}{2^n}) \rightarrow -\frac{1}{2}(\cosh^{-1} x_0)^2, & x_0 > 1 \end{cases} \quad (2.5.7)$$

亦即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n(1-x_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\arccos x_0)^2, & x_0 \in [-1, 1] \\ -\frac{1}{2}(\cosh^{-1} x_0)^2, & x_0 > 1 \end{cases} \quad (2.5.8)$$

(3) 可以归纳证明 $\forall n \in \mathbb{N}$ 都有 $-1 \leq y_n \leq 1$, 故可设 $\theta_n = \arccos y_n$, 则有

$$\theta_n = 2\theta_{n-1} \implies \theta_n = 2^n\theta_0 \implies y_n = \cos(2^n \arccos y_0) \quad (2.5.9)$$

当 $\frac{\theta_0}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ 时, 则 $\{\cos(2^n \theta_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 在 $[-1, 1]$ 上稠密, 故 $\{y_n\}$ 不收敛。当 $\theta_0 = \frac{p}{q} \cdot 2\pi$ 时, 可以归纳证明:

$$\text{i. } \forall n, m \in \mathbb{N}, (2^{n+1} - 2^n)p \equiv 0 \pmod{q} \implies (2^{n+m} - 2^n)p \equiv 0 \pmod{q}.$$

$$\text{ii. } \forall n, m \in \mathbb{N}, (2^{n+1} + 2^n)p \equiv 0 \pmod{q} \implies (2^{n+m} - 2^n)p \equiv 0 \pmod{q} \text{ 或 } (2^{n+m} + 2^n)p \equiv 0 \pmod{q}.$$

由于 $2^n p \pmod{q}$ 只能取离散的值, 为使 $\{y_n\}$ 收敛, 须 $\exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n \geq N$, 以下两者至少有一个成立:

$$2^n p \equiv p' \pmod{q}, \quad 2^n p \equiv -p' \pmod{q} \quad (2.5.10)$$

其中 p' 为常数, $\cos \frac{2p'\pi}{q}$ 即为极限。考虑 $2^N p$ 和 $2^{N+1} p$ 两项: 若它们同余, 则由 i. 可知 $n \geq N \implies 2^n p \equiv p' \pmod{q}$, 此时 $\{y_n\}$ 收敛, 且有

$$2^{N+1} p - 2^N p = 2^N p = kq \implies \theta_0 = \frac{p}{q} \cdot 2\pi = \frac{2\pi k}{2^N}, \quad k \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N} \quad (2.5.11)$$

若它们的和同余, 则由 ii. 可知 $n \geq N \implies 2^n p \equiv \pm p' \pmod{q}$, 此时 $\{y_n\}$ 收敛, 且有

$$2^{N+1} p + 2^N p = 3 \times 2^N p = kq \implies \theta_0 = \frac{p}{q} \cdot 2\pi = \frac{2\pi k}{3 \times 2^N}, \quad k \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N} \quad (2.5.12)$$

故 $\{y_n\}$ 收敛当且仅当

$$y_0 = \cos \frac{2\pi k}{2^N} \vee y_0 = \cos \frac{2\pi k}{3 \times 2^N}, \quad k \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N} \quad (2.5.13)$$

□

2.5.3 连续函数的介值性质, 反函数的连续性

例 2.5.3 (习题 3.3.2)

设 n 是正整数, 连续函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f(x) = x^{2n-1} + o(x^{2n-1}), x \rightarrow \infty$ 。

(1) 证明: f 是满射。

(2) 是否存在 $N > 0$ 使得 $\forall |y| > N$, $f(x) = y$ 有唯一解?

(3) 若连续函数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $g(x) = x^{2n} + o(x^{2n}), x \rightarrow \infty$, g 是否为满射?

解 (1) 由于 $f(x) \rightarrow \pm\infty, x \rightarrow \pm\infty$, 故 $\forall y \in \mathbb{R}, \exists M > 0$ 使得

$$x \geq M \implies f(x) \geq |y|, \quad x \leq -M \implies f(x) \leq -|y| \quad (2.5.14)$$

亦即

$$f(-M) \leq -|y| \leq y \leq |y| \leq f(M) \quad (2.5.15)$$

由介值定理可得 $\exists \xi \in [-M, M]$ 使得 $f(\xi) = y$, 即 f 为满射。

(2) 否。设 $f(x) = x + 2\sin x = x + o(x), x \rightarrow \infty$ 。注意到

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{2\pi}{3}\right) > \pi, \quad f(\pi) = \pi, \quad f\left(\frac{4\pi}{3}\right) < \pi, \quad f(2\pi) = 2\pi \quad (2.5.16)$$

由介值定理可得 $\exists \xi_1 \in (0, \frac{2\pi}{3})$ 、 $\exists \xi_2 \in (\frac{4\pi}{3}, 2\pi)$ 使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \pi$ 。考虑方程 $f(x) = (2n+1)\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$)，其始终至少有 3 个根 $2n\pi + \xi_1, (2n+1)\pi, 2n\pi + \xi_2$ 。

(3) 由例 2.6.3 可得 g 存在最小值，故不为满射。 \square

例 2.5.4 (习题 3.3.5)

设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的连续函数，且 $\exists x^* \in I$ 满足 $f(f(x^*)) = x^* \neq f(x^*)$ 。证明： f 在 I 中有不动点。

证明 考虑函数 $g(x) := f(x) - x$ 。不妨设 $g(0) \neq 0$ ，否则 0 就是不动点；不妨设 $g(0) > 0$ ，否则可令 $f \leftarrow -f$ 。

根据题设可得 $y^* = f(x^*) \in I$ 。假设 $\forall x \in I$ 都有 $g(x) \neq 0$ ，则 $\forall x \in I$ 都有 $g(x) > 0$ ，否则可通过介值定理找到零点，此时

$$f(f(x^*)) - x^* = [f(y^*) - y^*] + [f(x^*) - x^*] > 0 + 0 = 0 \quad (2.5.17)$$

矛盾！故 $\exists \xi \in I$ 使得 $g(\xi) = 0$ ，即 $f(\xi) = \xi$ 。 \square

2.5.4 有界闭集上的连续函数

例 2.5.5 (习题 3.4.1)

设 n 是正整数，连续函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f(x) = x^{2n} + o(x^{2n}), x \rightarrow \infty$ ，证明： f 有最小值。

证明 参见例 2.6.3。 \square

例 2.5.6 (习题 3.4.3)

设 $a \in \mathbb{R}$ ， f 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续， $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ 。证明： f 存在最大值或存在最小值。

证明 若 $f(x) \equiv A$ (此时 $A \neq \pm\infty$)，则命题显然成立。

若 $\exists b \in [a, +\infty)$ 使得 $f(b) > A$ ，则 $\exists N > 0$ ，使得

$$x > N \implies |f(x) - A| < f(b) - A \implies f(x) < f(b) \quad (2.5.18)$$

而连续函数 f 在有界闭集 $[a, N]$ 上有最大值，这也是 f 在 $[a, +\infty)$ 上的最大值。

若 $\exists b \in [a, +\infty)$ 使得 $f(b) < A$ ，同理可证 f 在 $[a, +\infty)$ 上有最小值。 \square

补充例题 若 $A \in \mathbb{R}$, 证明: f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续。

证明 反证法。假设 f 不一致连续, 则 $\exists \varepsilon > 0$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n, y_n \in [a, +\infty)$, 使得 $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ 且 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ 。

若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \{x_{n_k}\} = x^* \in [a, +\infty)$, 此时 $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k} \implies \lim_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k} = x^*$ 。由于 f 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 故 $\lim_{k \rightarrow +\infty} [f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})] = 0$, 矛盾!

若 $\{x_n\}$ 无界, 则 $\{y_n\}$ 亦无界。由于 f 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x_n) - f(y_n)] = 0$, 矛盾! \square

例 2.5.7 (习题 3.4.4)

称 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个 下半连续函数, 如果 $\forall x_0 \in I$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in I$, 都有

$$|x - x_0| < \delta \implies f(x_0) - \varepsilon < f(x) \quad (2.5.19)$$

证明: 如果 $I \subset \mathbb{R}$ 是有界闭集, 则 f 在 I 上有最小值。

证明 首先证明 f 有下界。假设 f 无下界, 则 $-n (n \in \mathbb{N}^*)$ 不是 f 的下界, 于是 $\exists x_n \in I$ 使得 $f(x_n) < -n$ 。由于 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq I$ 有界, 故必存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}^*} \rightarrow \xi \in I$ 。由于 f 是下半连续的, 故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\exists K > 0$ 使得

$$k > K \implies |x_{n_k} - \xi| < \delta \implies f(\xi) - \varepsilon < f(x_{n_k}) < -n_k \leq -k \quad (2.5.20)$$

令 $k \rightarrow +\infty$ 可得 $f(\xi) = -\infty$, 矛盾! 故 f 有下界, 故有下确界, 记为 m 。

随后证明 m 就是 f 在 I 上的最小值。根据下确界的性质, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $m + \frac{1}{n}$ 不再是 f 的下界, 故 $\exists y_n \in [a, b]$ 使得 $m \leq f(y_n) < m + \frac{1}{n}$, 因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = m$ 。由于 $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq I$ 有界, 故必存在收敛子列 $\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}^*} \rightarrow \eta \in I$ 。由于 f 是下半连续的, 故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\exists K > 0$ 使得

$$k > K \implies |y_{n_k} - \eta| < \delta \implies f(\eta) - \varepsilon < f(y_{n_k}) < m + \frac{1}{n_k} \leq m + \frac{1}{k} \quad (2.5.21)$$

令 $k \rightarrow +\infty$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 可得 $m \leq f(\eta) \leq m$, 故 $f(\eta) = m$, 即 m 是 f 的最小值。 \square

2.5.5 函数的一致连续性

例 2.5.8 (习题 3.5.1)

$\sin(x^2)$ 是 \mathbb{R} 上的一致连续函数吗? 为什么?

解 不是。假设 $\sin(x^2)$ 一致连续, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x - y| < \delta \implies |\sin(x^2) - \sin(y^2)| < \varepsilon \quad (2.5.22)$$

取 $\varepsilon = 1$, $n = \lfloor \frac{\pi}{4\delta^2} \rfloor + 1$, $x = \sqrt{(n + \frac{1}{2})\pi}$, $y = \sqrt{(n + \frac{3}{2})\pi}$, 则

$$|x - y| = \frac{\pi}{\sqrt{(n + \frac{1}{2})\pi} + \sqrt{(n + \frac{3}{2})\pi}} < \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} < \delta, \quad |\sin(x^2) - \sin(y^2)| = 2 \geq \varepsilon \quad (2.5.23)$$

矛盾! 故 $\sin(x^2)$ 不是一致连续的。 \square

例 2.5.9 (习题 3.5.3)

证明: \mathbb{R} 上任何连续的周期函数都是一致连续的。

证明 设 T 为 f 的周期, 则 f 在 $[0, 2T]$ 上一致连续, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, y \in [0, 2T]$, $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$; 故 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 设 $|x - y| < \delta' = \min\{\delta, T\}$, 记

$$\begin{cases} x = k_1 T + x_0, & k_1 \in \mathbb{Z}, x_0 \in [0, T) \\ y = k_2 T + y_0, & k_2 \in \mathbb{Z}, y_0 \in [0, T) \end{cases} \quad (2.5.24)$$

显然 k_1, k_2 至多相差 1。依据以下规则选择 ξ, η ,

$$\begin{cases} \xi = x_0, & \eta = y_0, & k_1 = k_2 \\ \xi = x_0 + T, & \eta = y_0, & k_1 = k_2 - 1 \\ \xi = x_0, & \eta = y_0 + T, & k_1 = k_2 + 1 \end{cases} \quad (2.5.25)$$

则有

$$|x - y| < \delta' \implies |\xi - \eta| < \delta \implies |f(x) - f(y)| = |f(\xi) - f(\eta)| < \varepsilon \quad (2.5.26)$$

即 f 在 \mathbb{R} 上一致连续。 \square

2.6 教材习题

例 2.6.1 (刘/闫/章·习题 2.6.3)

设 $f \in \mathcal{C}[a, b]$, $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, 求证: $\exists \xi \in [a, b]$ 使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \quad (2.6.1)$$

证明 令 $g(x) := nf(x) - f(x_1) - \dots - f(x_n)$, 则 $g \in \mathcal{C}[a, b]$ 。不妨设 $g(x_i) \neq 0$ ($\forall 1 \leq i \leq n$), 否则取 $\xi = x_i$ 即可。不妨设 $g(x_1) > 0$, 否则可令 $f \leftarrow -f$ 。

假设 $g(x_i) > 0$ ($\forall 1 \leq i \leq n$), 则有

$$0 = \sum_{i=1}^n g(x_i) > 0 \quad (2.6.2)$$

矛盾! 故 $\exists x_i \neq x_1$ 使得 $g(x_i) < 0$, 由介值定理可得 $\exists \xi \in [a, b]$ 位于 x_1, x_i 之间使得 $g(\xi) = 0$, 即

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \quad (2.6.3)$$

□

例 2.6.2 (刘/闫/章·习题 2.6.6)

设 $f \in \mathcal{C}[0, 1]$, $f(0) = f(1)$, 证明: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists \xi \in [0, 1]$ 使得 $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{n})$ 。

证明 令 $g(x) := f(x) - f(x + \frac{1}{n})$, 则 $g \in \mathcal{C}[0, \frac{n-1}{n}]$ 。不妨设 $g(0) \neq 0$, 否则取 $\xi = 0$ 即可。不妨设 $g(0) > 0$, 否则可令 $f \leftarrow -f$ 。

假设 $g(x) > 0$ ($\forall x \in [0, \frac{n-1}{n}]$), 则

$$0 = f(1) - f(0) = \sum_{i=0}^{n-1} g\left(\frac{i}{n}\right) > 0 \quad (2.6.4)$$

矛盾! 故 $\exists x \in (0, \frac{n-1}{n}]$ 使得 $g(x) \leq 0$, 由介值定理可得 $\exists \xi \in (0, x] \subseteq [0, 1]$ 使得 $g(\xi) = 0$, 即

$$f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{n}\right) \quad (2.6.5)$$

□

例 2.6.3 (刘/闫/章·习题 2.6.10)

设 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, 则 f 在 \mathbb{R} 上有最小值。

证明 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, 故 $\exists M > 0$ 使得 $\forall |x| > M$, $f(x) > f(0)$ 。由于 f 在 $[-M, M]$ 上连续, 故 f 在 $[-M, M]$ 上有最小值, 记为 m , 且 $\exists \xi \in [-M, M]$ 使得 $f(\xi) = m \leq f(0)$ 。因此

$$f(x) \begin{cases} > f(0), & |x| > M \\ \geq m, & |x| \leq M \end{cases} \geq m = f(\xi), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.6.6)$$

即 m 就是 f 在 \mathbb{R} 上的最小值。

□

例 2.6.4 (刘/闫/章·习题 2.6.11)

设 $f \in \mathcal{C}[a, b]$, 且 $f[a, b] = [a, b]$, 证明: $\exists \xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \xi$ 。

证明 令 $g(x) := f(x) - x$, 则 $g \in \mathcal{C}[a, b]$ 。不妨设 $g(a) \neq 0$, 否则取 $\xi = a$ 即可。不妨设 $g(a) > 0$, 否则可令 $f(x) \leftarrow -f(-x)$ 。

假设 $g(x) > 0$ ($\forall x \in [a, b]$), 则 g 在 $[a, b]$ 上有最小值 m , 且 $m > 0$, 此时

$$f(x) \geq x + m \geq a + m \implies [a, a + m) \subsetneq f[a, b] \quad (2.6.7)$$

矛盾! 故 $\exists x \in [a, b]$ 使得 $g(x) \leq 0$, 由介值定理可得 $\exists \xi \in [a, x]$ 使得 $g(\xi) = 0$, 即

$$f(\xi) = \xi \quad (2.6.8)$$

□

例 2.6.5 (刘/闫/章·习题 2.6.12)

设 $f \in \mathcal{C}[a, b]$, 且 $f[a, b] = [a, b]$ 、 f 在 $[a, b]$ 上单调不减。任取 $x_1 \in [a, b]$, 令 $x_{n+1} = f(x_n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$),

证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \xi$ 存在并且 $f(\xi) = \xi$ 。

证明 显然 $\{x_n\}$ 单调不减且有上界 b , 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \xi$ 存在。由于 f 在 $[a, b]$ 上连续, 故

$$\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = f(\xi) \quad (2.6.9)$$

□

第3次习题课 导数与高阶导数

2023年11月6日, 2024年10月24日, 2025年10月29日。本节对应微积分 A(1) 第5次习题课的内容。

3.1 知识点复习

3.1.1 导数与微分的概念, 函数的局部线性近似

重要概念回顾

(1) 内点、开集、线性函数。

(2) **可微**: 设 a 是集合 $I \subseteq \mathbb{R}$ 的内点, 称 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 在 a 处可微, 若存在常数 A 使得

$$f(a+h) = f(a) + Ah + o(h), \quad h \rightarrow 0 \quad (3.1.1)$$

此时称以 A 为系数的线性函数 $h \mapsto Ah$ 为 f 在 a 处的微分, 记为

$$df(a): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad df(a)(h) = Ah \quad (3.1.2)$$

(3) **可导**: (接可微) 易见

$$A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (3.1.3)$$

称上式等号右侧的极限为 f 在 a 处的导数, 记为 $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$ 。所以

$$df(a)(h) = f'(a)h \quad (3.1.4)$$

(4) **导函数**: 若 f 在任意 $x \in I$ 处都可微, 则称 f 在 I 上可微, 此时称 $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ 为 f 在 I 上的导函数。

重要定理回顾 若 f 在 a 可微, 则 $f(x) - f(a) = \mathcal{O}(x - a)$, $x \rightarrow a$, 从而 f 在 a 处连续。

应用

- (1) 任何线性函数 $L(x) = \lambda x$ 是可微的, 且有 $dL(a) = L$ 。用传统符号表示为 $d(\lambda x) = \lambda dx$ 。
- (2) $f(x) = x^2$ 的微分是 $d(x^2) = 2x dx$ 。
- (3) $f(x) = \frac{1}{x}$ 的微分是 $d(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2} dx$ 。
- (4) $f(x) = e^x$ 的微分是 $d(e^x) = e^x dx$ 。
- (5) $f(x) = \sin x$ 的微分是 $d(\sin x) = \cos x dx$, $f(x) = \cos x$ 的微分是 $d(\cos x) = -\sin x dx$ 。
- (6) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在 $x = 0$ 处连续, 但不可微。

注

- (1) **微分的几何意义:** 上述定义表明, 若 f 在 a 处可微, 则在 a 附近 f 可以近似写为 $f(a) + f'(a)(x - a)$, 即 f 在 a 处的图像在 a 点的切线附近可以近似看作一条直线。
- (2) **微分的符号表达:** 定义坐标映射函数 $dx(x_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $dx(x_0)(h) = h$, 则有 $df(x_0)(h) = f'(x_0) dx(x_0)(h)$ 。所以作为函数, $df(x) = f'(x) dx$ 。
- (3) 绝大多数作者在定义可微和导数时, 要求 a 是定义域内点; 但也不尽然, 比如 Terence Tao 在 *Analysis I* 4th edition 中仅要求 $a \in I$ 是 I 的聚点。

3.1.2 导数与微分的运算法则

重要定理回顾

- (1) **复合函数导数的链索法则:** 设 f 在 x_0 可微, g 在 $f(x_0)$ 可微, 则 $g \circ f$ 在 x_0 可微, 且

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(x_0) &= dg(y_0) \circ df(x_0) \\ (g \circ f)'(x_0) &= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \\ \frac{d(g \circ f)}{dx} \Big|_{x=x_0} &= \frac{dg}{dy} \Big|_{y=y_0} \cdot \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0} \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

- (2) **导数的四则运算:** 设 f, g 在 x_0 处可微, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则

- **线性:** $\alpha f + \beta g$ 在 a 可微, 且

$$\begin{aligned} d(\alpha f + \beta g)(a) &= \alpha df(a) + \beta dg(a) \\ (\alpha f + \beta g)'(a) &= \alpha f'(a) + \beta g'(a) \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

- **Leibniz**: fg 在 a 可微, 且

$$\begin{aligned}d(fg)(a) &= f(a) dg(a) + g(a) df(a) \\(fg)'(a) &= f(a)g'(a) + g(a)f'(a)\end{aligned}\quad (3.1.7)$$

- 若 $g(a) \neq 0$, 则 $\frac{f}{g}$ 在 a 可微, 且

$$\begin{aligned}d\left(\frac{f}{g}\right)(a) &= \frac{g(a) df(a) - f(a) dg(a)}{g^2(a)} \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}\end{aligned}\quad (3.1.8)$$

- (3) **逆映射定理**: 设函数 $f: (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$ 是严格单调的连续函数, f 在 x_0 可微, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 则 f 的反函数 $f^{-1}: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可微, 且

$$\begin{aligned}d(f^{-1})(y_0) &= (df(x_0))^{-1} \\(f^{-1})'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)} \\ \frac{d(f^{-1})}{dy} \Big|_{y=y_0} &= \frac{1}{\frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0}}\end{aligned}\quad (3.1.9)$$

应用

(1) $(a^x)' = a^x \ln a$, $(\tan x)' = \sec^2 x$.

(2) $(\ln x) = \frac{1}{x}$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

(3) 当 $0 < \varepsilon < 1$ 时, $f(x) = x - \varepsilon \sin x$ 有连续的反函数, 且 $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos(f^{-1}(y))}$.

注

- (1) **一阶微分的形式不变性**: 设 $z = z(y)$, $y = y(x)$, $x = x(u)$, 则

$$dz = \frac{dz}{dy} dy = \frac{dz}{dx} dx = \frac{dz}{du} du \quad (3.1.10)$$

其本质是曲线之间的相切关系与坐标系的选取无关。

3.1.3 高阶导数

重要概念回顾

- (1) 一阶导函数、二阶可微 (导数)、 n 阶可微 (导数)。
- (2) \mathcal{C}^1 函数、 \mathcal{C}^n 函数、 \mathcal{C}^∞ 函数。

重要定理回顾

(1) **和与积的高阶导数**: 设 f, g 在 x_0 处 n 阶可微, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则

- **线性**: $\alpha f + \beta g$ 在 a 处 n 阶可微, 且

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)}(a) = \alpha f^{(n)}(a) + \beta g^{(n)}(a) \quad (3.1.11)$$

- **Leibniz**: fg 在 a 处 n 阶可微, 且

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a) \quad (3.1.12)$$

(2) **复合、商、反函数的高阶导数**: 设 f 在 x_0 处 n 阶可微, 则

- **复合函数**: 若 g 在 $f(x_0)$ 处 n 阶可微, 则 $g \circ f$ 在 x_0 处 n 阶可微。作为特例, $(g(ax+b))^{(n)}(x) = a^n g^{(n)}(ax+b)$ 。
- **商函数**: 若 $f(x_0) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f}$ 在 x_0 处 n 阶可微。
- **逆函数**: 若 f 在 x_0 的邻域内 n 阶可微, 且有连续的反函数, $f'(x_0) \neq 0$, 则 f^{-1} 在 $y_0 = f(x_0)$ 处 n 阶可微。

(3) 设 f, g 在 x_0 处 n 阶可微, 且 $g(x_0) \neq 0$, 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处 n 阶可微。

(4) 初等函数 (在定义域内) 都是 \mathcal{C}^∞ 函数。为使这个结论成立, 我们约定幂函数的定义域为 $(0, +\infty)$ 。

应用

(1) Newton 第二定律: $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$ 。弹簧振子的运动方程为 $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ 。

(2) $(e^{\sin x^2})'' = e^{\sin x^2} (4x^2 \cos^2 x^2 - 4x^2 \sin x^2 + 2 \cos x^2)$ 。

(3) $(e^x)^{(n)} = e^x$, $(e^{\alpha x})^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$, $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$, $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$, $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{x^n}$ 。

(4) $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$, $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$, $(e^{ix})^{(n)} = i^n e^{ix}$ 。

(5) $(\frac{1}{x^2-1})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2} \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right]$ 。

(6) $\tan^{(5)}(0) = 16$ 。

(7) 设 $0 < \varepsilon < 1$, $y = x - \varepsilon \sin x$ 有 \mathcal{C}^∞ 的反函数, 且

$$x = \frac{y}{1-\varepsilon} - \frac{\varepsilon y^3}{6(1-\varepsilon)^4} + o(y^3) \quad (3.1.13)$$



图 3.1.1: 牛顿的导数符号

3.1.4 导数与微分的应用

重要概念回顾

- (1) 正则曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 、切线 $\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$ 、法线。
- (2) 曲率: (Huygens-Newton) 设 $\gamma: (x(t), y(t)), t \in (a, b)$ 是一条正则曲线, 满足 $x(t), y(t)$ 都是 \mathcal{C}^2 函数, 且

$$\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall t \in (a, b) \quad (3.1.14)$$

则当 $t \rightarrow t_0$ 时, γ 在点 $(x(t_0), y(t_0))$ 处的法线与点 $(x(t_0), y(t_0))$ 处的法线的交点有极限, 这个极限 C 称为 γ 在点 $(x(t_0), y(t_0))$ 处的**曲率圆中心**, C 到点 $(x(t_0), y(t_0))$ 的距离 R 称为**曲率半径**, 称以 C 为圆心以 R 为半径的圆为 γ 在点 $(x(t_0), y(t_0))$ 处的**曲率圆**, 称曲率半径的倒数 $\kappa = \frac{1}{R}$ 为 γ 在点 $(x(t_0), y(t_0))$ 处的**曲率**。

- (3) 平面极坐标系、沿曲线的坐标系, 不同坐标系下运动的速度、加速度。
- (4) 微分方程 $y'(t) = f(t, y)$ 的斜率场 (方向场)、解、积分曲线。

- (5) 微分方程组 $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$ 的向量场、解、积分曲线。

重要定理回顾 曲率的计算公式:

$$\kappa = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} x'(t_0) & x''(t_0) \\ y'(t_0) & y''(t_0) \end{pmatrix} \right|}{[(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3} \quad (3.1.15)$$

应用

- (1) $x = y^2$ 在 (a^2, a) 处的切线是 $x = a^2 + 2a(y - a)$, 法线是 $y = a - 2a(x - a^2)$ 。

- (2) 平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后汇聚于焦点。
- (3) 当 $t \rightarrow a$ 时抛物线 $x = y^2$ 在点 (a^2, a) 处的法线与在点 (t^2, t) 处的法线的交点的极限为 $(\frac{1}{2} + 3a^2, -4a^3)$, 曲率为

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + 3a^2 + 12a^4 + 16a^6}} \quad (3.1.16)$$

- (4) 从 Kepler 定律到万有引力定律。
- (5) **Newton-Raphson 方法:**

$$y \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \implies x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.1.17)$$

- (6) 放射性物质衰变、Malthus 人口模型、修正的人口模型(Logistic 模型)、捕猎模型、捕食者—饵模型(Lotka-Volterra 模型)、流感模型、弹簧振子—Hooke 定律、带有阻尼的弹簧振子、单摆。

3.2 雨课堂作业

3.2.1 函数连续性

例 3.2.1 (作业第 1 题)

不定项选择题: 以下哪些函数在指定区间上是一致连续的?

- (A) $\ln x, x \in (0, 1]$
- (B) $\frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R}$
- (C) $\tan x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- (D) $x \sin x, x \in \mathbb{R}$
- (E) $\sin(x^2), x \in \mathbb{R}$
- (F) $e^{-1/|x|}$, 在 $x = 0$ 时补充定义函数值为 0, $x \in \mathbb{R}$

解 BF。一致连续有以下充分条件: 若 f 在区间 I 上可导, 且 f' 在 I 上有界, 则 f 满足 Lipschitz 函数, 从而在 I 上一致连续。证明可利用 Lagrange 中值定理:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq M|x - y| < M\delta = \varepsilon \quad (3.2.1)$$

易验证 BF 均为偶函数, 且均在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 故仅需验证 $x \geq 1$ 时的一致连续性, 计算可得:

$$\begin{aligned} f_B(x) &:= \frac{\sin x}{x}, & f'_B(x) &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, & |f'_B(x)| &\leq \left| \frac{\cos x}{x} \right| + \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq 1 + 1 = 2 \\ f_F(x) &:= e^{-1/x}, & f'_F(x) &= \frac{e^{-1/x}}{x^2}, & |f'_F(x)| &\leq \frac{e^{-1}}{1} = e^{-1} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

因此 BF 在指定区间上一致连续。

欲证明函数在指定区间上不一致连续, 可利用反证法, 构造两个序列 $(x_n), (y_n)$, 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$, 但存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ 。对于 ACDE, 具体构造如下:

(A) 取 $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{2n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$, 但 $\ln x_n - \ln y_n = \ln 2$ 。

(C) 取 $x_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}, y_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$, 但注意到 $x < \tan x < \frac{4}{\pi}x$ ($0 < x < \frac{\pi}{4}$), 故有

$$\begin{aligned} \tan x_n - \tan y_n &= \tan(x_n - y_n)(1 + \tan x_n \tan y_n) = \tan \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{\tan \frac{1}{n} \tan \frac{1}{2n}} \right) \\ &> \frac{1}{2n} \frac{1}{\frac{4}{\pi n} \frac{4}{2\pi n}} = \frac{\pi^2}{16} n \geq \frac{\pi^2}{16} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

(D) 取 $x_n = n\pi, y_n = n\pi + \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$, 但注意到 $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$), 故有 $f(y_n) - f(x_n) = (n\pi + \frac{1}{n}) \sin \frac{1}{n} > n \cdot \frac{2}{\pi n} = \frac{2}{\pi}$ 。

(E) 取 $x_n = \sqrt{n\pi}, y_n = \sqrt{(n+1)\pi}$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$, 但注意到 $|f(y_n) - f(x_n)| = 2$ 。

□

注 以上条件不是必要条件, 例如 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $(0, 1]$ 上一致连续, 但 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0, 1]$ 上无界。

例 3.2.2 (作业第 2 题)

不定项选择题: 设 f 是有界开区间 (a, b) 上的连续函数, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都是有限实数。则以下结论正确的是

- (A) f 在开区间 (a, b) 上必然一致连续
- (B) f 在开区间 (a, b) 上必然有上界
- (C) f 在开区间 (a, b) 上必然有下界
- (D) f 在开区间 (a, b) 上必然有最大值
- (E) f 在开区间 (a, b) 上必然有最小值

解 ABC。补充定义 $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $f(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$, 则 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续、有界且有最大值和最小值, 故 f 在 (a, b) 上有界, 但不一定有最大值和最小值 (因为可能在边界处取得最值), 例如 $f(x) = x$ 。□

例 3.2.3 (作业第 3 题)

不定项选择题: 设 f 是 \mathbb{R} 上的连续的周期函数。则以下结论中正确的是:

- (A) f 有最大值
- (B) f 有最小值
- (C) f 是一致连续函数

解 ABC。在一个周期上应用连续函数的性质, 随后利用周期性即可。□

例 3.2.4 (作业第 4 题)

判断题: 除常值函数 0 和形如 $f(x) = e^{\lambda x^2}$ 的函数外, 还存在其他连续函数 f 满足 $f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x)f(y)$ ($\forall x, y \in \mathbb{R}$)。

解 错误。代入 $x = y = 0$ 可得 $f(0) = 0$ 或 $f(0) = 1$ 。由数学归纳法可证明 $\forall r \in \mathbb{Q}^+$, $|f(\sqrt{r}x)| = |f(x)|^r$ 。

若 $f(0) = 0$, 代入 $y = 0$ 可得 $f(|x|) = 0$, 故 f 在 $[0, +\infty)$ 上恒等于 0, 且在 $(-\infty, 0)$ 上至多有一个不为 0 的函数值, 否则 $0 = f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) = f(x_1)f(x_2) \neq 0$ 产生矛盾。由 f 的连续性可知 f 恒为 0。

若 $f(0) = 1$, 代入 $y = 0$ 可得 $f(x) = f(|x|)$, 故 f 为偶函数, 只需讨论 f 在 $[0, +\infty)$ 上的性质。若 $\exists x_0 > 0$ 使得 $f(x_0) = 0$, 则 $f(\sqrt{r}x_0) = 0$ 对任意 $r \in \mathbb{Q}^+$ 成立, 从而由连续性可知 $f(0) = 0$, 与 $f(0) = 1$ 矛盾, 故 f 在 \mathbb{R} 上恒不为 0。再由 $f(0) = 0$ 和介值定理可得 f 在 $[0, +\infty)$ 上恒为正值, 且 $f(\sqrt{r}x) = f(x)^r$ 对任意 $r \geq 0, r \in \mathbb{Q}$ 成立。令 $g(x) := \sqrt{|\ln f(x)|}$, 则

$$f(\sqrt{r}x) = f(x)^r \implies g(\sqrt{r}) = \sqrt{r}g(1) =: \sqrt{|\ln f(1)|}r, \quad \forall r \geq 0, r \in \mathbb{Q} \quad (3.2.4)$$

由 g 的连续性可知 $g(x) = \sqrt{|\ln f(1)|}x$ 对任意 $x \geq 0$ 成立, 从而 $f(x) = f(1)^{x^2}$ 。□

例 3.2.5 (作业第 5 题)

不定项选择题: 关于参数 t 的如下命题: 若 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 则 $\exists \xi, \eta \in [0, 1]$ 使得 $\eta - \xi = t$ 且

$$f(\eta) - f(\xi) = t(f(1) - f(0)) \quad (3.2.5)$$

- (A) $t = 1$ 时命题成立
- (B) $t = \frac{1}{2}$ 时命题成立
- (C) $t = \frac{1}{3}$ 时命题成立

(D) $t = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^+$) 时命题成立

(E) 对任意 $0 < t < 1$, 命题成立

解 ABCD。令 $\tilde{f}(x) := f(x) - f(0) - [f(1) - f(0)]x$, 此时 $\tilde{f} \in \mathcal{C}[0, 1]$ 且 $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = 0$, 则 (D) 选项等价于 $\forall n \in \mathbb{N}^+, \exists \xi \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ 使得 $\tilde{f}(\xi) = \tilde{f}(\xi + \frac{1}{n})$, 这正是例 2.6.2 的结论。

为了寻找 (E) 选项的反例, 我们可以把 f 的斜率 (导数) 做成周期为 t 的函数, 这样任意长度为 t 的区间上的增量 $f(x+t) - f(x)$ 都是常数 C 。只要把常数 C 选成不等于 t , 再按比例缩放使得 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 就得到反例。令 $t = \frac{3}{5}$, 一个具体的例子为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{3}x, & x \in [0, \frac{3}{10}] \\ \frac{1}{2}, & x \in [\frac{3}{10}, \frac{3}{5}] \\ \frac{5}{3}x - \frac{1}{2}, & x \in [\frac{3}{5}, \frac{9}{10}] \\ 1, & x \in [\frac{9}{10}, 1] \end{cases} \quad (3.2.6)$$

容易验证 $f(x + \frac{3}{5}) - f(x) \equiv \frac{1}{2}$ 。 □

例 3.2.6 (作业第 6 题)

判断题: 若 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是周期为 1 的连续函数, 则 $\forall x \in (0, 1), \exists y \in [0, 1]$ 使得 $f(x+y) = f(y)$ 。

解 正确。连续周期函数 f 必有最大值, 设最大值点为 $t_0 \in \mathbb{R}$ 、最大值为 M 。考虑函数 $g(t) := f(x+t) - f(t)$, 则 $g(t_0) = f(x+t_0) - M \leq 0, g(t_0-x) = M - f(t_0-x) \geq 0$, 从而 $\exists t \in [t_0-x, t_0]$ 使得 $g(t) = 0$ 。令 $y = t - [t]$, 则 $y \in [0, 1]$ 且 $f(x+y) = f(y)$ 。 □

另解 考虑函数 $g(t) := f(x+t) - f(t)$, 则

$$\int_0^1 g(t) dt = \int_x^{1+x} f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt = 0 \quad (3.2.7)$$

若 g 在 $[0, 1]$ 上不恒为 0, 则要么 $g(t) > 0$ 、要么 $g(t) < 0$, 从而 $\int_0^1 g(t) dt \neq 0$, 产生矛盾。 □

例 3.2.7 (作业第 7 题)

不定项选择题:

命题 1: 若 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = A \in \mathbb{R}$, 且 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$, 则 f 在开区间 $(0, 1)$ 内恒等于 A 。

命题 2: 若进一步还有 f 在 $x = 1$ 处连续, 则 f 在开区间 $(0, +\infty)$ 内恒等于 A 。

(A) 两个命题都不成立

(B) 命题 1 成立

(C) 命题 2 成立

解 BC。 $\forall x \in (0, 1)$, 考虑数列 $x_n = x^{2^n}$, 则 $\{f(x_n)\}$ 为常数列, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 从而 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A$, 命题 1 成立。若 f 在 $x = 1$ 处连续, 则 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = A$ 。 $\forall x \in (1, +\infty)$, 考虑数列 $x_n = x^{2^{-n}}$, 则 $\{f(x_n)\}$ 亦为常数列, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$, 从而 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(1) = A$, 命题 2 成立。 \square

例 3.2.8 (作业第 8 题)

填空题: 使得以下命题成立的正整数 k 的最大值为_____: 若 $a_4 > |a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3|$, 则函数 $f(x) = a_4 \cos 4x + a_3 \cos 3x + a_2 \cos 2x + a_1 \cos x + a_0$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内至少有 k 个实根。

解 $k = 8$ 。当 $k = 0, 1, \dots, 8$ 时, 由于 $a_4 > \sum_{i=1}^3 |a_i|$, $f(\frac{k}{4}\pi)$ 的符号恰为正负交替, 由介值定理可得 f 在 $(0, 2\pi)$ 内至少有 8 个实根。取 $f(x) = \cos 4x$ 时, f 在 $(0, 2\pi)$ 内恰有 8 个实根, 故所求最大值为 8。 \square

例 3.2.9 (作业第 9 题)

判断题: 存在函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 它只在所有整数处连续。

解 正确。构造如下函数:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad (3.2.8)$$

\square

例 3.2.10 (作业第 10 题)

填空题: 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n+2} - 1}{x^{2n} - x^n + x}$, 则函数 f 的间断点个数为_____, 其中第一类间断点的个数为_____, 且第一类间断点_____。

(A) 都是可去间断点

(B) 都是跳跃间断点

(C) 既有可去间断点, 也有跳跃间断点

解 3; 2; C。当 $|x| > 1$ 时, 对充分大的 n 满足 $x^{2n} > 2|x|^n > |x|^n + |x| > 1$, 故 $f(x) = x^2$ 。当 $|x| = 1$ 时, $f(x) = 0$ 。当 $0 < |x| < 1$ 时, $f(x) = -\frac{1}{x}$ 。故 f 的间断点为 $x = -1, 0, 1$, 其中 $x = 0$ 为第二类间断点, $x = \pm 1$

为第一类间断点, 其中 $x = -1$ 为可去间断点, $x = 1$ 为跳跃间断点。 □

3.2.2 导数

例 3.2.11 (作业第 1, 2, 3, 4, 5, 6 题)

计算导数:

(1) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $f(x) = x^{x^x}$ (先计算指数部分的幂), 则 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $f(x) = \frac{4x \ln x}{1+x^2}$, 则 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) $f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5) $f(x) = \ln(\cos x + \sin x)$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(6) $f(x) = 64\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{1+x}}}$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 1; 1; 2; -2; 1; 2。除了直接求导外, 还可以利用小 o 符号, 例如 (6):

$$\begin{aligned} f(x) &= 64 \left[2 + \left(3 + 1 + \frac{1}{2}x + o(x) \right)^{1/2} \right]^{1/2} = 64 \left[2 + 2 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}x + o(x) \right) \right]^{1/2} \\ &= 128 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{32}x + o(x) \right] = 2 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

□

例 3.2.12 (作业第 7 题)

填空题: 已知 $f'(x) = \frac{A \arcsin x}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}}$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{9}{2}$, $f(0) = 0$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 2。注意到

$$f'(x) = \frac{A \arcsin x}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}} = \frac{A}{\pi^2} \arcsin x (\arcsin x)' \implies f(x) = \frac{A}{2\pi^2} (\arcsin x)^2 + C \quad (3.2.10)$$

代入 $f(0) = 0$ 可得 $C = 0$, 代入 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{9}{2}$ 可得 $A = 144$, 从而 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ 。 □

例 3.2.13 (作业第 8 题)

填空题: 设

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (3.2.11)$$

则

- (1) f 连续当且仅当 $\alpha > \underline{\hspace{2cm}}$;
- (2) f 可微当且仅当 $\alpha > \underline{\hspace{2cm}}$;
- (3) f' 连续当且仅当 $\alpha > \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 0; 1; 2。只需考虑 $x = 0$ 时的情况。

(1) 当 $\alpha > 0$ 时, 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad (3.2.12)$$

当 $\alpha \leq 0$ 时, 取 $x_n = \frac{2}{n\pi}$, 则 $f(x_n)$ 在不同 n 时取值为 1 或 -1, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ 不存在, 故 f 在 $x = 0$ 处不连续。

(2) f 在 $x = 0$ 处可微当且仅当以下极限存在

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} \quad (3.2.13)$$

故 $\alpha - 1 > 0$, 即 $\alpha > 1$ 。

(3) 当 $x \neq 0$ 时有 $|x|' = \frac{x}{|x|}$, 故求导可得

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x |x|^{\alpha-2} \sin \frac{1}{x} - |x|^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (3.2.14)$$

为使 f' 在 $x = 0$ 处连续, 需有 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$, 此时 $\alpha > 2$ 。 □

例 3.2.14 (作业第 9 题)

填空题: 已知 $f'(x) = -f(x)$, $f(0) = e$, 则 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 1。考虑 $g(x) := e^x f(x)$, 则 $g'(x) = e^x [f(x) + f'(x)] = 0$, 故 $g(x) \equiv g(0) = e$, 从而 $f(x) = e^{1-x}$, 故 $f(1) = 1$ 。 □

例 3.2.15 (作业第 10 题)

填空题: 已知 $f'(x) = \sin x$, $f(0) = 1$, 则 $f(\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 3。易知 $f(x) = 2 - \cos x$, 故 $f(\pi) = 3$ 。 □

例 3.2.16 (作业第 11 题)

判断题: 存在处处不可微的函数 f 使得极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right] \quad (3.2.15)$$

处处存在。

解 正确。考虑 Dirichlet 函数。 □

例 3.2.17 (作业第 12 题)

判断题: 存在 \mathbb{R} 上的可微函数 f 满足 $f(f(x)) = x^2 - 3x + 3$ 。

解 错误。考虑不动点 $f(f(x)) = x$, 解得 $x = 1$ 或 $x = 3$ 。设 $f(1) = a$, 则 $f(a) = 1$ 。求导可得 $f'(f(x))f'(x) = 2x - 3$, 分别代入 $x = 1$ 和 $x = a$ 得到 $f'(1)f'(a) = -1 = 2a - 3$, 则 $a = 1$, 此时 $f'(1)^2 = -1$, 矛盾。 □

例 3.2.18 (作业第 13 题)

判断题: 存在 \mathbb{R} 上的可微函数 f 满足 $f(f(x)) = -x^3 + x^2 + 1$ 。

解 错误。考虑不动点 $f(f(x)) = x$, 解得 $x = 1$ 。设 $f(1) = a$, 则 $f(a) = 1$ 、 $f(f(a)) = 1$, 故 $a = 1$ 。求导可得 $f'(f(x))f'(x) = -3x^2 + 2x$, 代入 $x = 1$ 可得 $f'(1)^2 = -1$, 矛盾。 □

例 3.2.19 (作业第 14 题)

不定项选择题: 设 f 是可微函数, 则以下选项中正确的是:

- (A) 若 f 是偶函数, 则 f' 是奇函数
- (B) 若 f 是奇函数, 则 f' 是偶函数
- (C) 若 f' 是偶函数, 则 f 是奇函数
- (D) 若 f' 是奇函数, 则 f 是偶函数

(E) 若 f 是周期函数, 则 f' 是周期函数

(F) 若 f' 是周期函数, 则 f 是周期函数

解 ABDE. CF 不成立的原因在于两个导函数相同的函数之间可能相差一个常数项。 □

例 3.2.20 (作业第 15 题)

已知 f 在 $x=0$ 处连续, 满足

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = \lambda \quad (3.2.16)$$

证明 $f'(0) = \lambda$ 。

证明甲

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{2x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= 2f'(0) - f'(0) = f'(0) \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

证明乙

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0). \quad (3.2.18)$$

证明丙

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(2x) - f'(x)}{1} \\ &= 2f'(0) - f'(0) = f'(0) \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

(A) 甲的证明是对的

(B) 乙的证明是对的

(C) 丙的证明是对的

(D) 甲乙丙的证明都是错的

解 D. 以上证明均默认 f 在 $x=0$ 处可导, 但题中仅给出 f 在 $x=0$ 处连续, 故均不成立。正确的证明参考例 1.6.24。 □

3.2.3 高阶导数

例 3.2.21

设 $0 < \varepsilon < 1$, 曲线 γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x(t) = t - \varepsilon \sin t \\ y(t) = 1 - \varepsilon \cos t \end{cases} \quad (3.2.20)$$

求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

解 计算可得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'(t)} \frac{d}{dt} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^3} = \frac{\varepsilon(\cos t - \varepsilon)}{(1 - \varepsilon \cos t)^3} \quad (3.2.21)$$

□

例 3.2.22

设 $f(x) = x^{x^x}$ (先计算指数部分的幂), 则 $f''(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 2。设 $y = x^{x^x}$, 取对数可得

$$\ln y = e^{x \ln x} \ln x, \quad y(1) = 1 \quad (3.2.22)$$

求导可得

$$\frac{y'}{y} = e^{x \ln x} \left[(\ln x + 1) \ln x + \frac{1}{x} \right], \quad y'(1) = 1 \quad (3.2.23)$$

再求导可得

$$\frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} = e^{x \ln x} \left((\ln x + 1)^2 \ln x + \frac{\ln x + 1}{x} \right) + e^{x \ln x} \left(\frac{2 \ln x + 1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad (3.2.24)$$

代入 $x = y(1) = 1$, $y'(1) = 1$ 可得 $y''(1) = 1 + 1 = 2$ 。

□

例 3.2.23

设 f 是 \mathcal{C}^∞ 函数。记 $y(x) = f(\ln x)$ 。证明对任意正整数 n , 成立

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{d}{dt} - (n-1) \right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{d}{dt} f(t) \quad (3.2.25)$$

其中 $t = \ln x$ 。

解 采用数学归纳法。对于 $n = 1$, 有

$$x \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{dt}{dx} \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} f(t) \quad (3.2.26)$$

若命题对 n 成立, 则

$$\begin{aligned} x^{n+1} \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} &= x^{n+1} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x^n} \left(\frac{d}{dt} - (n-1) \right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{d}{dt} f(t) \right] \\ &= x^{n+1} \left[-\frac{n}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^n} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt} \right] \left(\frac{d}{dt} - (n-1) \right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{d}{dt} f(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt} - n \right) \left(\frac{d}{dt} - (n-1) \right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{d}{dt} f(t) \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

故命题对 $n+1$ 也成立, 由数学归纳法可知命题对任意正整数 n 成立。□

例 3.2.24 (习题 4.3.11)

设 $n \in \mathbb{N}^*$ 。证明 n 阶 Legendre 多项式

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (3.2.28)$$

是以下二阶微分方程的解:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (3.2.29)$$

证明 注意到

$$\begin{aligned} [(x^2 - 1)^{n+1}]^{(n+2)} &= [(x^2 - 1)(x^2 - 1)^n]^{(n+2)} \\ &= (x^2 - 1) [(x^2 - 1)^n]^{(n+2)} + 2(n+2)x [(x^2 - 1)^n]^{(n+1)} + (n+2)(n+1) [(x^2 - 1)^n]^{(n)} \\ &= (n+1) [2x(x^2 - 1)^n]^{(n+1)} \\ &= (n+1) \left\{ 2x [(x^2 - 1)^n]^{(n+1)} + 2(n+1) [(x^2 - 1)^n]^{(n)} \right\} \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

整理可得

$$(x^2 - 1) [(x^2 - 1)^n]^{(n+2)} + 2x [(x^2 - 1)^n]^{(n+1)} - n(n+1) [(x^2 - 1)^n]^{(n)} = 0 \quad (3.2.31)$$

代入 $P_n(x)$ 的表达式可得

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (3.2.32)$$

□

另证 设 $y_n = (x^2 - 1)^n$, 由于 $P_n(x) \propto y_n^{(n)}$, 故我们只需证明 y_n 满足相同形式的微分方程。注意到

$$y' = 2nx(x^2 - 1)^{n-1} \implies (x^2 - 1)y' = 2nxy \quad (3.2.33)$$

等式两边同时求 $n+1$ 阶导可得

$$(x^2 - 1)y^{(n+2)} + 2(n+1)xy^{(n+1)} + n(n+1)y^{(n)} = 2nxy^{(n+1)} + 2n(n+1)y^{(n)} \quad (3.2.34)$$

移项得证。□

例 3.2.25

设 $0 < \varepsilon < 1$, 曲线 γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x(t) = t - \varepsilon \sin t \\ y(t) = 1 - \varepsilon \cos t \end{cases} \quad (3.2.35)$$

按以下步骤求曲线 γ 经过点 $P(0, 1 - \varepsilon)$ 时的曲率 κ :

- (1) 写出曲线 γ 在点 $P(0, 1 - \varepsilon)$ 处的切线和法线 L_1 方程;
- (2) 求曲线 γ 在点 $Q(t - \varepsilon \sin t, 1 - \varepsilon \cos t)$ 处的法线 L_2 与 L_1 的交点坐标;
- (3) 让 $t \rightarrow 0$, 求 (2) 中交点的极限 C (曲率中心);
- (4) 求 C 与 P 的距离 (曲率半径) 的倒数 κ (曲率)。

解 (1) 求导可得 $x'(t) = 1 - \varepsilon \cos t$, $y'(t) = \varepsilon \sin t$ 。曲线在点 $P(0, 1 - \varepsilon)$ 处的切线斜率为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(0)}{x'(0)} = 0$, 故法线方程为 $L_1: x = 0$ 。

(2) 曲线在点 $Q(t - \varepsilon \sin t, 1 - \varepsilon \cos t)$ 处的切线斜率为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\varepsilon \sin t}{1 - \varepsilon \cos t} \quad (3.2.36)$$

切线、法线的斜率互为负倒数, 故法线方程为

$$L_2: y - (1 - \varepsilon \cos t) = -\frac{1 - \varepsilon \cos t}{\varepsilon \sin t} [x - (t - \varepsilon \sin t)] \quad (3.2.37)$$

联立 L_1, L_2 可得

$$y_0 = \frac{1 - \varepsilon \cos t}{\varepsilon \sin t} (t - \varepsilon \sin t) + (1 - \varepsilon \cos t) = \frac{(1 - \varepsilon \cos t)t}{\varepsilon \sin t} \quad (3.2.38)$$

故交点坐标为 $(0, y_0)$ 。

(3) 计算 $t \rightarrow 0$ 的极限可得

$$y_C = \lim_{t \rightarrow 0} y_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \varepsilon \cos t)t}{\varepsilon \sin t} = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \quad (3.2.39)$$

故曲率中心为 $C(0, \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon})$ 。

(4) 曲率半径为

$$R = PC = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} - (1 - \varepsilon) = \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon} \quad (3.2.40)$$

故曲率为

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2} \quad (3.2.41)$$

□

注 若直接应用曲率的公式, 可得

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \Big|_{t=0} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \quad (3.2.42)$$

3.3 补充习题

3.3.1 导数与微分

例 3.3.1

设 f 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 在开区间 $I = (\alpha, \beta)$ 内可微。

(1) 证明: $\forall x_0 \in I$, 若 $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq I$ 满足 $a_n \leq x_0 \leq b_n$, $a_n < b_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x_0) \quad (3.3.1)$$

(2) 证明: $\forall a_1, b_1 \in I$ 且 $a_1 < b_1$, 存在闭区间套 $[a_n, b_n]$ 使得

$$\frac{f(b_{n+1}) - f(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} \leq \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.3.2)$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \quad (3.3.3)$$

(3) 利用 (1) 和 (2) 的结论证明, $\forall a, b \in I$ 且 $a < b$, $\exists \xi \in [a, b]$ 使得

$$f'(\xi) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (3.3.4)$$

(4) 利用 (3) 证明: 若 $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$, 则 f 在 I 上单调不减; 若 $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$, 则 f 在 I 上严格增。

(5) 利用 (4) 证明: 若 $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$, 则 f 在 $[\alpha, \beta]$ 上为常数。

证明 (1) 由 f 在 x_0 处可微可得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in I$,

$$|x - x_0| < \delta \implies -\varepsilon|x - x_0| < f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) < \varepsilon|x - x_0| \quad (3.3.5)$$

由于 $a_n, b_n \rightarrow x_0$, 故 $\exists N > 0$ 使得

$$n \geq N \implies x_0 - \delta < a_n \leq x_0 \leq b_n < x_0 + \delta \quad (3.3.6)$$

从而有

$$\begin{aligned} -\varepsilon(x_0 - a_n) &\leq f(a_n) - f(x_0) - f'(x_0)(a_n - x_0) \leq \varepsilon(x_0 - a_n) \\ -\varepsilon(b_n - x_0) &\leq f(b_n) - f(x_0) - f'(x_0)(b_n - x_0) \leq \varepsilon(b_n - x_0) \\ \implies -\varepsilon(b_n - a_n) &\leq f(b_n) - f(a_n) - f'(x_0)(b_n - a_n) \leq \varepsilon(b_n - a_n) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

即

$$\left| \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - f'(x_0) \right| \leq \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x_0) \quad (3.3.8)$$

(2) 当 $[a_n, b_n]$ 已构造好时, 我们继续构造 $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ 。考虑该区间的中点 $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$,

- 若 $\frac{f(c_n) - f(a_n)}{c_n - a_n} \leq \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$, 则令 $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$ 。
- 若 $\frac{f(c_n) - f(a_n)}{c_n - a_n} > \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$, 则必有 $\frac{f(b_n) - f(c_n)}{b_n - c_n} < \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$, 令 $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$ 。

这样就构造出了闭区间套 $[a_n, b_n]$ 。

(3) 取 $a_1 = a$, $b_1 = b$, 并依 (2) 构造闭区间套。由有界闭区间套定理可知, $\exists \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \xi$ 。由 (1) 可知

$$f'(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (3.3.9)$$

(4) $\forall a, b \in I$, 设 $a < b$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 使得

$$0 \leq f'(\xi) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f(b) - f(a) \geq 0 \quad (3.3.10)$$

即 f 在开区间 (α, β) 上单调不减。

在端点 α, β 处, 注意到 $\forall x, y \in (\alpha, \beta)$ 且 $x \leq y$, $\exists u \in (\alpha, x)$, $v \in (y, \beta)$, 则有

$$f(u) \leq f(x) \leq f(y) \leq f(v) \quad (3.3.11)$$

令 $u \rightarrow \alpha^+$, $v \rightarrow \beta^-$, 由连续性可知

$$f(\alpha) = \lim_{u \rightarrow \alpha^+} f(u) \leq f(x) \leq f(y) \leq \lim_{v \rightarrow \beta^-} f(v) = f(\beta) \quad (3.3.12)$$

即 f 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上单调不减。

当 $f'(x) > 0$ 时, 只需要将上述证明中的红色不等号改为严格不等号即可。

(5) 由 (4) 可知 f 和 $-f$ 均在 $[\alpha, \beta]$ 上单调不减, 故 f 在 $[\alpha, \beta]$ 上为常数。□

例 3.3.2

设 $A > 1$,

$$f(x) = \begin{cases} x + Ax^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (3.3.13)$$

- (1) 证明: f 可微, 但 f' 在 $x=0$ 处不连续, 并讨论 f' 在 $x=0$ 处的间断类型。
 (2) 证明: $f'(0) > 0$, 但在 $x=0$ 的任意邻域内, f 都不是单调函数。
 (3) 例 3.3.1 中如果不假定 $a_n \leq x_0 \leq b_n$, 则结论不成立。

解 (1) 当 $x \neq 0$ 时, f 为初等函数的复合, 故 $f \in \mathcal{C}^\infty$, 且

$$f'(x) = 1 + 2Ax \sin \frac{1}{x} - A \cos \frac{1}{x} \quad (3.3.14)$$

它在 $x \rightarrow 0^\pm$ 时均无极限, 故 $x=0$ 是 f' 的第二类间断点。当 $x=0$ 时, 有

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad (3.3.15)$$

故 f 可微。

(2) $f'(0) = 1 > 0$, 取 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ 、 $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, 则

$$f'(x_n) = 1 - A < 0, \quad f'(y_n) = 1 + A > 0 \quad (3.3.16)$$

于是在包含 x_n 的任何开区间内, f 都不是单调不减的; 在包含 y_n 的任何开区间内, f 都不是单调不增的。故 $\forall \delta > 0$, 取足够大的 n 使 $x_n, y_n \in (0, \delta)$, 于是 f 在区间 $[0, \delta)$ 中都不是单调的。同理可证 f 在区间 $(-\delta, 0]$ 中也不是单调的。

(3) 由 $f'(x_n) < 0$ 知存在 $0 < a_n < x_n < b_n < 2x_n$ 使得 $\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} < 0$ 。易见 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$, 而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(0)$ 不成立。□

例 3.3.3

设 $\alpha > 0$, 记

$$f_\alpha(x) := x^{x^\alpha}, \quad x > 0 \quad (3.3.17)$$

(1) 求 $f'_\alpha(x)$ 。

(2) 证明 $x=0$ 为 f_α 的可去间断点。

(3) 记

$$g(x) := \begin{cases} f_\alpha(x), & x > 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} f_\alpha(t), & x \leq 0 \end{cases} \quad (3.3.18)$$

讨论 g 是否在 $x=0$ 处可微。在它可微时, 讨论 g' 的连续性。

解 (1) f_α 为初等函数, 因此

$$f'_\alpha(x) = x^{x^\alpha + \alpha - 1} (\alpha \ln x + 1) \quad (3.3.19)$$

(2) 注意到

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = \exp \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = \exp \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t}{e^{\alpha t}} = \exp 0 = 1, \quad x = e^{-t} \quad (3.3.20)$$

(3) 由(2)知

$$g(x) = \begin{cases} x^{x^\alpha}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad (3.3.21)$$

易见 $g'_-(0) = 0$, 注意到

$$g'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{x^\alpha} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^\alpha \ln x} - 1}{x^\alpha \ln x} \frac{\ln x}{x^{1-\alpha}} = \begin{cases} 0, & \alpha > 1 \\ -\infty, & \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (3.3.22)$$

因此 g 在 $x = 0$ 处可微当且仅当 $\alpha > 1$, 此时

$$g'(x) = \begin{cases} x^{x^\alpha + \alpha - 1}(\alpha \ln x + 1), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (3.3.23)$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = 0$, 故 g' 在 $x = 0$ 处连续。 □

例 3.3.4

$f(x)$ 在 $x = a$ 可导, $f(a) \neq 0$, 求

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(a + \frac{1}{x})}{f(a)} \right)^x \quad (3.3.24)$$

解 注意到

$$f(a + y) = f(a) + f'(a)y + o(y), \quad y \rightarrow 0 \quad (3.3.25)$$

因此

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(a + \frac{1}{x})}{f(a)} \right)^x &= \exp \left[x \ln \frac{f(a + \frac{1}{x})}{f(a)} \right] = \exp \left[x \ln \left(1 + \frac{f'(a)}{f(a)} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \right] \\ &= \exp \left[\frac{f'(a)}{f(a)} + o(1) \right] \rightarrow \exp \frac{f'(a)}{f(a)}, \quad x \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

□

另解

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f\left(a + \frac{1}{x}\right)}{f(a)} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{f\left(a + \frac{1}{x}\right) - f(a)}{f(a)} \right)^{\frac{f(a)}{f\left(a + \frac{1}{x}\right) - f(a)} \cdot \frac{f\left(a + \frac{1}{x}\right) - f(a)}{f(a) \frac{1}{x}}} \\
&= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{f\left(a + \frac{1}{x}\right) - f(a)}{f(a)} \right)^{\frac{f(a)}{f\left(a + \frac{1}{x}\right) - f(a)}} \right]^{\frac{1}{f(a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f\left(a + \frac{1}{x}\right) - f(a)}{\frac{1}{x}}} \\
&= \exp \frac{f'(a)}{f(a)}
\end{aligned} \tag{3.3.27}$$

□

注 若使用换元法 $y = \frac{1}{x} \rightarrow 0$, 需注意 $f(a)$ 可能小于 0。

$$\left(\frac{f\left(a + \frac{1}{x}\right)}{f(a)} \right)^x = \exp \frac{\ln |f\left(a + \frac{1}{x}\right)| - \ln |f(a)|}{\frac{1}{x}} \rightarrow \exp [\ln |f(y)|]'_{y=a} = \exp \frac{f'(a)}{f(a)} \tag{3.3.28}$$

例 3.3.5

设 $a > b > 0$, 考虑具有相同形状的一族椭圆

$$E_t: \frac{x^2}{a^2 t} + \frac{y^2}{b^2 t} = 1, \quad t > 0 \tag{3.3.29}$$

设 $P(x_1, y_1)$ 是椭圆 E_t 上一点, 它不在椭圆的长轴或短轴上。证明: 存在唯一的 $s > 0$ 使得椭圆 E_t 在点 (x_1, y_1) 处的法线与椭圆 E_s 相切。

解 视椭圆方程为 y 关于 x 的隐函数, 则

$$\frac{2x_1}{a^2 t} + \frac{2y_1}{b^2 t} y'(x_1) = 0 \implies y'(x_1) = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \tag{3.3.30}$$

故椭圆 E_t 在点 P 处的切线和法线为

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1), \quad y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1) \tag{3.3.31}$$

设该法线是椭圆 E_s 在 (x_2, y_2) 处的切线, 则有

$$y_2 - y_1 = -\frac{b^2 x_2}{a^2 y_2} (x_2 - x_1) = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x_2 - x_1) \tag{3.3.32}$$

因此

$$\begin{cases} a^2 y_1 (x_2 - x_1) - b^2 x_1 (y_2 - y_1) = 0 \\ a^4 y_1 y_2 + b^4 x_1 x_2 = 0 \end{cases}, \quad s = \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} \tag{3.3.33}$$

这是关于 x_2, y_2 的线性方程组, 系数矩阵可逆, 故 s 存在且唯一。 □

例 3.3.6

已知摆线的参数方程

$$\begin{cases} x = A(t - \sin t) \\ y = A(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.3.34)$$

(1) 证明: 摆线方程在 $t \in (0, 2\pi)$ 时确定了可微函数 $y = y(x)$, 并讨论 $y(x)$ 的单调性。

(2) 证明: 摆线满足微分方程 $(1 + y_x'^2)y = 2A$ 。

证明 (1) 注意到

$$x'(t) = A(1 - \cos t) > 0, \quad t \in (0, 2\pi) \quad (3.3.35)$$

由例 3.3.1 可知 x 有可微的反函数 $t(x)$, 于是 $y = y(t(x))$ 可微, 由链索法则可得

$$y'(x) = y'(t)t'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \quad (3.3.36)$$

故当 $t \in [0, \pi]$, 即 $x \in [0, A\pi]$ 时, 函数 $y(x)$ 严格增; 当 $t \in [\pi, 2\pi]$, 即 $x \in [A\pi, 2A\pi]$ 时, 函数 $y(x)$ 严格减。

(2) 直接代入验证。 □

3.3.2 高阶导数**例 3.3.7**

设 $y = u(x)$ 、 $z = v(y)$ 且 y, z 均二阶可导, 求复合函数 $z = v(u(x))$ 的二阶导数。

解 由链索法则可得

$$\begin{aligned} z'(x) &= v'(u(x))u'(x) \\ z''(x) &= v''(u(x))u'(x)^2 + v'(u(x))u''(x) \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

□

例 3.3.8

设 $x(t), y(t)$ 二阶可微, $x'(t) \neq 0 (\forall t)$ 。试用 x, y 关于 t 的导数与二阶导数表示函数 $y = y(x)$ 的二阶导数。

解 由链索法则可得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'(t)} \frac{d}{dt} \frac{y'(x)}{x'(t)} = \frac{y''(x)x'(t) - y'(x)x''(t)}{x'(t)^3} \quad (3.3.38)$$

□

例 3.3.9

设 f 在区间 (a, b) 内满足 $f'' > 0$, 证明:

(1) $\forall x_0 \in (a, b), \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$, 都有

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (3.3.39)$$

(2) $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $x_1 \neq x_2$, 以及 $\forall t \in (0, 1)$, 都有

$$f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \quad (3.3.40)$$

满足上式的函数 f 称为严格凸函数(下凸), 满足相反不等式的函数称为严格凹函数(上凸)。若将上式中的严格不等号改为不等号, 则称为凸函数或凹函数。

证明 (1) 令

$$g(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in (a, b) \quad (3.3.41)$$

求导可知

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - f'(x_0) \\ g''(x) &= f''(x) > 0 \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

故 g' 在 (a, b) 上严格增。易见 $g'(x_0) = 0$, 故当 $x \in (a, x_0)$ 时 $g'(x) < 0$, 即 g 在 (a, x_0) 严格减; 当 $x \in (x_0, b)$ 时 $g'(x) > 0$, 即 g 在 (x_0, b) 严格增。因此

$$g(x) > g(x_0) = 0, \quad \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\} \quad (3.3.43)$$

(2) 令

$$h(t) := (1-t)f(x_1) + tf(x_2) - f((1-t)x_1 + tx_2), \quad t \in [0, 1] \quad (3.3.44)$$

求导可知

$$h''(t) = -f''((1-t)x_1 + tx_2)(x_2 - x_1)^2 < 0 \quad (3.3.45)$$

故 h' 在 $[0, 1]$ 上严格减。易见 $h(0) = h(1) = 0$, 由 Rolle 定理可知 $\exists t_0 \in (0, 1)$ 使得 $h'(t_0) = 0$, 故 h 在 $(0, t_0)$ 上严格增、在 $(t_0, 1)$ 上严格减。 $h(x) > \min\{h(0), h(1)\} = 0$, 从而

$$f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \quad \forall t \in (0, 1) \quad (3.3.46)$$

□

例 3.3.10

在例 3.3.6 的基础上,

(1) 证明: 摆线方程在 $t \in (0, 2\pi)$ 时确定了 \mathcal{C}^∞ 函数 $x = x(y)$ 。

(2) 求 $y''(x)$ 。

(3) 证明: 摆线位于它的每条切线的下方 (切点除外), 即 $y = y(x)$ 为严格凹函数。

解 (1) 由例 3.3.6 知 $x = x(t)$ 有 \mathcal{C}^∞ 反函数, 从而 $y = y(t(x))$ 是 \mathcal{C}^∞ 函数。

(2) 由例 3.3.6 知

$$y'(x) = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \quad (3.3.47)$$

从而

$$y''(x) = \frac{1}{x'(t)} \frac{dy'(x)}{dt} = -\frac{1}{A(1 - \cos t)^2} \quad (3.3.48)$$

(3) 由例 3.3.9 知结论成立。 \square

例 3.3.11

讨论 De Cartes 叶形线 $x^3 + y^3 = 3xy$ 的凹凸性。

解 令 $t = \frac{y}{x}$, 则

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad t \neq -1 \quad (3.3.49)$$

计算可知

$$y''(x) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^3} = \frac{-2(t^3+1)^4}{3(2t^3-1)^3} \quad (3.3.50)$$

所以当 $t \in (-\infty, -1)$ 时, 曲线下凸; 当 $t \in (-1, 2^{-1/3})$ 时, 曲线下凸; 当 $t \in (2^{-1/3}, +\infty)$ 时, 曲线上凸。 \square

例 3.3.12

设 f 为 \mathcal{C}^∞ 函数, 求 $g(x) := \frac{f(x)}{x}$ 的 n 阶导数表达式。

解 易见 $g \in \mathcal{C}^\infty$, 由高阶导数的 Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot (-1)(-2) \cdots (-n+k) \frac{1}{x^{n-k+1}} \\ &= n! \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \frac{(-1)^{n-k}}{x^{n-k+1}} \end{aligned} \quad (3.3.51)$$

\square

例 3.3.13

证明函数

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (3.3.52)$$

是 \mathcal{C}^∞ 函数。

证明 当 $x \neq 0$ 时, f 为初等函数, 从而是 \mathcal{C}^∞ 函数。当 $x = 0$ 时, 我们采用归纳法证明

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} [P_n(\frac{1}{x}) \sin \frac{1}{x} + Q_n(\frac{1}{x}) \cos \frac{1}{x}], & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (3.3.53)$$

其中 $f^{(n)}$ 表示 f 的 n 次迭代, P_n, Q_n 均为多项式。

(1) 当 $n = 0$ 时, 显然成立。

(2) 设命题在 n 时成立, 则在 $n + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3} \left[P_n \left(\frac{1}{x} \right) \sin \frac{1}{x} + Q_n \left(\frac{1}{x} \right) \cos \frac{1}{x} \right] \\ &\quad + e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{-1}{x^2} \left[P_n' \left(\frac{1}{x} \right) \sin \frac{1}{x} + P_n \left(\frac{1}{x} \right) \cos \frac{1}{x} + Q_n' \left(\frac{1}{x} \right) \cos \frac{1}{x} - Q_n \left(\frac{1}{x} \right) \sin \frac{1}{x} \right] \end{aligned} \quad (3.3.54)$$

因此

$$\begin{aligned} P_{n+1}(t) &= 2t^3 P_n(t) - t^2 P_n'(t) + t^2 Q_n(t) \\ Q_{n+1}(t) &= 2t^3 Q_n(t) - t^2 Q_n'(t) - t^2 P_n(t) \end{aligned} \quad (3.3.55)$$

即 P_{n+1}, Q_{n+1} 亦为多项式。注意到

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} [P_n(\frac{1}{x}) \sin \frac{1}{x} + Q_n(\frac{1}{x}) \cos \frac{1}{x}]}{x} = 0 \quad (3.3.56)$$

故 $f^{(n+1)}(0) = 0$ 。 □

3.4 讲义习题

3.4.1 导数与微分的概念, 函数的局部线性近似

例 3.4.1 (例 4.1.4)

设 $f'(x_0) = \lambda$, $x_n < x_0 < y_n$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = x_0$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \lambda \quad (3.4.1)$$

如果所有 x_n, y_n 都位于 x_0 的同一侧, 结论还成立吗? 为什么?

证明 参见例 3.3.1 和例 3.3.2. □

错解 以下错解很精彩, 请读者自行找出错误之处: 由 Heine 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(y_n) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_n)}{y_n - x_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - x_0}{y_n - x_n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0) - f(x_n)}{x_0 - x_n} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_0 - x_n}{y_n - x_n} \\ &= f'(x_0) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - x_0}{y_n - x_n} + f'(x_0) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_0 - x_n}{y_n - x_n} = f'(x_0) \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

□

3.4.2 导数与微分的运算法则

例 3.4.2 (习题 4.2.4 节选)

求以下函数的导数:

(1) $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$

(3) $\tan(\arcsin x)$

(5) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(2) $\sin e^{x^2}$

(4) $\sqrt{x + \sqrt[3]{x}}$

解 (1)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (3.4.3)$$

(2)

$$f'(x) = 2xe^{x^2} \cos e^{x^2} \quad (3.4.4)$$

(3)

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \quad (3.4.5)$$

(4)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}} \left(1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) \quad (3.4.6)$$

(5)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (3.4.7)$$

□

例 3.4.3 (习题 4.2.7)

设 $0 < \varepsilon < 1$, $x(t) = t - \varepsilon \sin t$, $y(t) = 1 - \varepsilon \cos t$. 求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\varepsilon \sin t}{1 - \varepsilon \cos t} \quad (3.4.8)$$

□

3.4.3 高阶导数**例 3.4.4 (习题 4.3.2 节选)**

求以下函数的二阶导数:

(1) $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$

(3) $\tan(\arcsin x)$

(2) $\sin(e^{x^2})$

(4) $\sqrt{x + \sqrt[3]{x}}$

解 (1)

$$f''(x) = \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}} \quad (3.4.9)$$

(2)

$$f''(x) = 2e^{x^2} \left[(1+2x^2) \cos e^{x^2} - 2x^2 e^{x^2} \sin e^{x^2} \right] \quad (3.4.10)$$

(3)

$$f''(x) = \frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}} \quad (3.4.11)$$

(4)

$$f''(x) = -\frac{5 + 10x^{2/3} + 9x^{4/3}}{36(1 + x^{2/3})x^{5/3}\sqrt{x + x^{1/3}}} \quad (3.4.12)$$

□

例 3.4.5 (习题 4.3.9)

设 $A, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 讨论函数

$$f(x) := \begin{cases} |x|^\alpha \ln |x|, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}; \quad g(x) := \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{|x|^\beta}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases} \quad (3.4.13)$$

的连续性、可微性和高阶可微性。

解 由于 f, g 均为偶函数, 故我们仅讨论 $x \geq 0$ 的情况。显然 $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$, 故我们只需要讨论 $x = 0^+$ 处的连续性和可微性。

(1) 当 $\alpha \leq 0$ 时, $x^\alpha \geq 1$ 且 $\ln x \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow 0^+$), 此时 $x^\alpha \ln x \rightarrow -\infty$, 故 f 在 $x = 0^+$ 处不连续, 自然不可微。

当 $\alpha > 0$ 时, 设 $n = [\alpha] - 1$, 则 $0 < \alpha - n \leq 1$, 由熟知的极限可得 $x^{\alpha-n} \ln x = o(1)$ ($x \rightarrow 0^+$), 故有 $f(x) = x^n \cdot x^{\alpha-n} \ln x = x^n \cdot o(1) = o(x^n)$ ($x \rightarrow 0^+$), 故 f 至少是 n 阶可导的, 且 $f^{(k)}(0) = 0$ ($0 \leq k \leq n$), 须有 $A = 0$ 。

对于 $n+1$ 阶导, 注意到

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^\alpha)^{(n-k)} (\ln x)^{(k)} = c_0 x^{\alpha-n} \ln x + \sum_{k=1}^n c_k x^{\alpha-n+k} \cdot x^{-k} = x_0^{\alpha-n} (c_0 \ln x + d_0) \quad (3.4.14)$$

考虑

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-n-1} (c_0 \ln x + d_0) = -\infty \quad (3.4.15)$$

故 f 不存在 $n+1$ 阶导数。

综上所述,

- 当 $\alpha \leq 0$ 或 $A \neq 0$ 时, f 不连续。
- 当 $\alpha > 0$ 且 $A = 0$ 时, f 具有且仅具有 $([\alpha] - 1)$ 阶可微性。

(2) 当 $\beta \leq 0$ 时, 此时有

$$g(x) = x^\alpha \sin(x^{-\beta}) = x^{\alpha-\beta} + o(x^{\alpha-\beta}), \quad x \rightarrow 0^+ \quad (3.4.16)$$

故当 $\alpha < \beta$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$, g 不连续, 自然不可微。当 $\alpha = \beta$ 时, $g(x) \rightarrow 1$, 为使 g 连续须有 $A = 1$; 当 $\alpha > \beta$ 时, $g(x) \rightarrow 1$, 为使 g 连续须有 $A = 0$; 当 $\alpha \geq \beta$ 时, 有

$$g(x) = x^\alpha \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} x^{-k\beta} + o(x^{-n\beta}) \right) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} x^{\alpha-k\beta} + o(x^{\alpha-n\beta}) \quad (3.4.17)$$

因此

- g 至少具有 $[\alpha - \beta]$ 阶可微性。
- 若 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, 则 g 具有无穷阶可微性。

当 $\beta > 0$ 时, 若 $\alpha \leq 0$ 则显然 g 不连续, 自然不可微; 若 $\alpha > 0$, 设 $n = [\alpha] - 1$, 则 $0 < \alpha - n \leq 1$, $x^{\alpha-n} \sin \frac{1}{x^\beta} = o(1)$ ($x \rightarrow 0^+$), 故有 $g(x) = x^n \cdot x^{\alpha-n} \sin \frac{1}{x^\beta} = x^n \cdot o(1) = o(x^n)$ ($x \rightarrow 0^+$), 故 g 至少是 n 阶可导的, 且 $g^{(k)}(0) = 0$ ($0 \leq k \leq n$), 须有 $A = 0$ 。

对于 $n+1$ 阶导, 可以归纳证明

$$\left(\sin \frac{1}{x^\beta} \right)^{(n)} = \frac{P_n(x^\beta) \cos(x^{-\beta}) + Q_n(x^\beta) \sin(x^{-\beta})}{x^{(1+\beta)n}} \quad (3.4.18)$$

因此

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^\alpha)^{(n-k)} \left(\sin \frac{1}{x^\beta} \right)^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^n c_k x^{\alpha-n-\beta k} [P_k(x^\beta) \cos(x^{-\beta}) + Q_k(x^\beta) \sin(x^{-\beta})] \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

考虑

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x-0} = \sum_{k=0}^n c_k x^{\alpha-n-1-\beta k} [P_k(x^\beta) \cos(x^{-\beta}) + Q_k(x^\beta) \sin(x^{-\beta})] \quad (3.4.20)$$

由于 $\alpha - n - 1 \leq 0$, 故 g 不存在 $n+1$ 阶导数。

综上所述,

- 当 $\beta \leq 0$ 时,
 - 若 $\alpha < \beta$, 或 $\alpha = \beta$ 且 $A \neq 1$, 或 $\alpha > \beta$ 且 $A \neq 0$, g 不连续。
 - 设 $\alpha \geq \beta$ 且 A 满足连续性条件, 若 α, β 不全为整数, 则 g 具有且仅具有 $[\alpha - \beta]$ 阶可微性; 若 α, β 均为整数, 则 g 具有无穷阶可微性。
- 当 $\beta > 0$ 时,
 - 若 $\alpha \leq 0$ 或 $A \neq 0$, g 不连续。
 - 若 $\alpha > 0$ 且 $A = 0$, g 具有且仅具有 $([\alpha] - 1)$ 阶可微性。

□

例 3.4.6 (习题 4.3.10)

设 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 证明: f 是 \mathcal{C}^∞ 函数, 且 $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

证明 当 $x \neq 0$ 时, f 为初等函数, 故 f 在 $x \neq 0$ 处无穷阶可导. 设 $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$, 则有

$$e^{-\frac{1}{x^2}} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) = f^{(n+1)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left[\frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) \right] \quad (3.4.21)$$

亦即

$$P_{n+1}(t) = 2t^3 P_n(t) - t^2 P_n'(t) \quad (3.4.22)$$

结合 $P_0(t) = 1$, 归纳可证 P_n 为多项式以及

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x} P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t P_{n-1}(t)}{e^{t^2}} = 0 \quad (3.4.23)$$

故 f 是 \mathcal{C}^∞ 函数, 且 $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. □

例 3.4.7 (习题 4.3.16)

设 $0 < \varepsilon < 1$, $x(t) = t - \varepsilon \sin t$, $y(t) = 1 - \varepsilon \cos t$. 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

解

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt} \frac{\varepsilon \sin t}{1 - \varepsilon \cos t}}{1 - \varepsilon \cos t} = \frac{\varepsilon(\cos t - \varepsilon)}{(1 - \varepsilon \cos t)^3} \quad (3.4.24)$$

□

3.4.4 应用: 平面曲线的切线、法线和曲率

例 3.4.8 (习题 4.4.4)

设 $0 < \varepsilon < 1$, $x(t) = t - \varepsilon \sin t$, $y(t) = 1 - \varepsilon \cos t$. 求该曲线在点 $(0, 1 - \varepsilon)$ 处的曲率.

解 计算可得

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 - \varepsilon \cos t, & y'(t) &= \varepsilon \sin t \\ x''(t) &= \varepsilon \sin t, & y''(t) &= \varepsilon \cos t \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

故

$$x'(0) = 1 - \varepsilon, \quad y'(0) = 0, \quad x''(0) = 0, \quad y''(0) = \varepsilon \quad (3.4.26)$$

代入曲率公式可得

$$\kappa = \frac{|x'(0)y''(0) - x''(0)y'(0)|}{[(x'(0))^2 + (y'(0))^2]^{3/2}} = \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2} \quad (3.4.27)$$

□

3.5 教材习题

例 3.5.1 (刘/闫/章· 习题 3.2.4 节选)

求下列函数的导数:

(1) $y = (1 - x^3)^{3/2}$ 。

(2) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ 。

(3) $y = \operatorname{arccot} \frac{1-x}{1+x}$ 。

解

(1) $y' = -\frac{9}{2}x^2\sqrt{1-x^3}$ 。

(2) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$ 。

(3) $y' = \frac{1}{1+x^2}$ 。

□

例 3.5.2 (刘/闫/章· 习题 3.2.9 节选)

求 $xy + \ln y = 1$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程。

解 利用隐函数求导法则可得

$$y + xy' + \frac{y'}{y} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y^2}{xy+1} \Rightarrow y'|_{x=1} = -\frac{1}{2} \quad (3.5.1)$$

因此切线方程为

$$y = -\frac{1}{2}(x-1) + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad (3.5.2)$$

□

例 3.5.3 (刘/闫/章·习题 3.2.10 节选)

对下列参数方程, 求 $y'(x)$ 。

$$(1) \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^3}{1+t^3} \end{cases}$$

$$(2) \rho = ae^{m\theta} \quad (a, m \in \mathbb{R})$$

解 (1) 利用链式法则可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2}{1-2t^3} \quad (3.5.3)$$

(2) 视极坐标方程为关于 θ 的参数方程 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, 利用链式法则可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{(ae^{m\theta} \cos \theta)'}{(ae^{m\theta} \sin \theta)'} = \frac{m - \tan \theta}{1 + m \tan \theta} \quad (3.5.4)$$

□

例 3.5.4 (刘/闫/章·习题 3.3.3 节选)

求下列函数的指定阶数的导数:

$$(1) y = \frac{\ln x}{x}, \text{ 求 } y^{(5)}.$$

$$(2) y = \frac{1}{2x-x-x^2}, \text{ 求 } y^{(20)}.$$

$$(3) y = x^3 e^x, \text{ 求 } y^{(n)}.$$

解 (1) 利用 Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} (\ln x)^{(k)} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \ln x + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k} (n-k)! (-1)^{k-1} (k-1)!}{x^{n-k+1} x^k} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} n!}{x^{n+1}} \left(-\ln x + \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)! (k-1)!}{(n-k)! k!} \right) = \frac{(-1)^{n-1} n!}{x^{n+1}} \left(-\ln x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

故

$$y^{(5)} = \frac{274 - 120 \ln x}{x^6} \quad (3.5.6)$$

(2) 因式分解可得

$$y^{(n)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{3} \left[\frac{1}{(x+2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right] \quad (3.5.7)$$

故

$$y^{(20)} = \frac{20!}{3} \left[\frac{1}{(x+2)^{20}} - \frac{1}{(x-1)^{20}} \right] \quad (3.5.8)$$

(3) 利用 Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^3)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{\max\{n,3\}} \binom{n}{k} \frac{3!}{(3-k)!} x^{3-k} e^x \\ &= e^x [x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)] \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

□

例 3.5.5 (刘/闫/章·习题 3.3.4 节选)

对参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, 求 $y''(x), y'''(x)$ 。

解 根据链式法则可得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{x'(t)} \frac{d}{dt} \frac{\sin t}{1 - \cos t} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2} \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{1}{x'(t)} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{a(1 - \cos t)^2} \right) = \frac{2 \sin t}{a^2(1 - \cos t)^4} \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

□

例 3.5.6 (刘/闫/章·习题 3.3.7)

设 $f(x) = (\arcsin x)^2$, 证明:

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2f^{(n)}(x) = 0 \quad (3.5.11)$$

并求 $f^{(n)}(0)$ 。

证明 注意到

$$f'(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{1-x^2} \left(1 + \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \right) \quad (3.5.12)$$

因此

$$(1-x^2)f''(x) = 2 + xf'(x) \quad (3.5.13)$$

等式两端同时求 n 阶导可得

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - 2nxf^{(n+1)}(x) - n(n-1)f^{(n)}(x) = xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x) \quad (3.5.14)$$

亦即

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2f^{(n)}(x) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (3.5.15)$$

显然 $f^{(0)}(0) = f^{(1)}(0) = 0$ 、 $f^{(2)}(0) = 2$ ，代入 $x = 0$ 可得

$$f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0) \quad (3.5.16)$$

故

$$f^{(2n+1)}(0) = 0, \quad f^{(2n)}(0) = 2^{2n-1}[(n-1)!]^2 \quad (3.5.17)$$

□

第4次习题课 用导数研究函数

2023年11月13日, 2024年10月31日, 2025年11月5日。本节对应微积分 A(1) 第6次习题课的内容。

4.1 知识点复习

4.1.1 微分中值定理

重要概念回顾

- (1) 极大值点、极大值、极小值点、极小值、极值点、极值。
- (2) **临界点 (驻点)**: 若 $f'(x_0) = 0$, 则称 x_0 为 f 的一个临界点。

重要定理回顾

- (1) **Fermat 引理**: 若 f 在极值点 x_0 处可微, 则 x_0 是 f 的临界点。
- (2) **Rolle 定理**: 设 f 在 (a, b) 内可微 ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$), 并且

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad (4.1.1)$$

则 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

- (3) **Cauchy 中值定理**: 设 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, 函数 $x(t), y(t)$ 在区间 (a, b) 内可微, 满足极限 $x(a^+), x(b^-), y(a^+), y(b^-)$ 都收敛, 则 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$x'(\xi)[y(b^-) - y(a^+)] - y'(\xi)[x(b^-) - x(a^+)] = 0 \quad (4.1.2)$$

- (4) **Lagrange 中值定理**: 设函数 f 在有界闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可微, 则 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad (4.1.3)$$

- (5) 在区间 I 上, f 为常数当且仅当 $f' \equiv 0$ 。

应用

(1) 设 $A > \frac{\pi}{2}$, $f(x) := \begin{cases} x + Ax^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f'(0) = 1$, 但 f 在 $x = 0$ 的任何邻域内均不单调。

(2) 导数有界的函数都是 Lipschitz 函数, 从而是一致连续的。

(3) 微分方程 $y' = \alpha y$ 的所有解是 $y = Ce^{\alpha x}$, 其中 C 为任意常数。

(4) 微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的所有解是 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数。

(5) 证明: 对区间 $[\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1]$ 中的任何有理数 $\frac{p}{q}$, 都有

$$\left| \frac{p}{q} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{2(\sqrt{2} + 1)q^2} \quad (4.1.4)$$

注

(1) 在 Rolle 定理中, 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则定理结论可写成: $\exists \theta \in (0, 1)$ 使得 $f'(\theta a + (1 - \theta)b) = 0$ 。

(2) 在 Cauchy 中值定理中, 若 $x(b^-) \neq x(a^+)$, 则定理结论可写成

$$\frac{y(b^-) - y(a^+)}{x(b^-) - x(a^+)} = \frac{y'(\xi)}{x'(\xi)} \quad (4.1.5)$$

(3) 在以上中值定理中, 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则“函数在区间端点的(单侧)极限存在”可用“函数在区间端点处(单侧)连续”代替。

(4) Cauchy 中值定理的几何解释: 平面曲线 $\Gamma: (x(t), y(t))$ 在某点 $P(x(\xi), y(\xi))$ 处的切向量 $(x'(\xi), y'(\xi))$ 与点 $A(x(a^+), y(a^+))$ 到点 $B(x(b^-), y(b^-))$ 的连线的 l_{AB} 平行。

(5) Cauchy 中值定理对二维以上空间中的曲线不成立。

4.1.2 函数的单调性与极值

重要定理回顾

(1) **Darboux 定理:** 区间上的导函数具有介值性质。设函数 f 在区间 $[a, b]$ 上连续、在 (a, b) 内可导, 且 $f'_+(a) < f'_-(b)$, 则 $\forall c \in (f'_+(a), f'_-(b))$, $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = c$ 。由此可知 f 的导函数 f' 的间断点只可能是第二类间断点。

(2) **函数的单调性:** 设 f 在区间 I 上可微。

- 若 $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$ (< 0), 则 f 在 I 上是增函数 (减函数)。
- f 在区间 I 上单调不减 (不增) 当且仅当 $f'(x) \geq 0$ (≤ 0)。

- 若 $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$, 则 f 在 I 上严格单调。

(3) **函数的极值:** 设 $n \geq 1, \exists \delta > 0$ 使得 f 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上连续。

- 若 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0), f'(x) \leq 0; \forall x \in (x_0, x_0 + \delta), f'(x) \geq 0$, 则 x_0 是 f 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上的最小值点。
- 若 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0), f'(x) \geq 0; \forall x \in (x_0, x_0 + \delta), f'(x) \leq 0$, 则 x_0 是 f 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上的最大值点。
- 若 $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 是 f 的极小值点。
- 若 $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 是 f 的极大值点。
- 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0, f^{(2n)}(x_0) > 0 (< 0)$, 则 x_0 是 f 的极小值点 (极大值点)。
- 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n)}(x_0) = 0, f^{(2n+1)}(x_0) > 0 (< 0)$, 则 f 在 x_0 的一个邻域内单调增 (减)。

应用

- (1) 海滩上的救生员看到海中有人溺水, 救生员在沙滩上的奔跑速度为 v_1 , 在水中的游泳速度为 v_2 , 求救生员的最佳救援路线。
- (2) $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数。
- (3) **Newton 法的局部收敛性与二阶收敛性:** 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是 \mathcal{C}^1 函数, $f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0$, 则

- 在 x^* 的一个小邻域中, Newton 迭代

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.1.6)$$

得到的数列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ 收敛到 x^* 。

- 若 $f \in \mathcal{C}^2$, 则 $\exists C > 0$ 使得数列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ 满足

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2, \quad C = \frac{\max_{x \in [a, b]} |f''(x)|}{\min_{x \in [a, b]} |f'(x)|} \quad (4.1.7)$$

由此可以看出, 当 $y = f(x)$ 近似直线 (二阶导数 f'' 绝对值小) 且斜率较大 (一阶导数 f' 绝对值大) 时, Newton 法有很好的收敛性。

- (4) **Newton 法的全局收敛性:** 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是 \mathcal{C}^1 凸的增函数, $f(a) < 0 < f(b)$, 则 $\forall x_0 \in (a, b)$, 只要 $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < b$, 由 Newton 迭代

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.1.8)$$

得到的数列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ 就收敛于 f 的 (唯一) 零点 x^* 。

注 虽然在一点处的一阶导数无法提供局部的单调性结论，但在一点处的高阶导数是可以的。

4.1.3 L'Hôpital 法则

重要定理回顾

(1) **L'Hôpital 法则**: 设在 $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 的一个 (单侧) 去心邻域内, f, g 可微, $g' \neq 0$, 且

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, 或 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ 。
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 。

则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, 且为 A 。

应用 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$ 。

注

(1) **广义 L'Hôpital 法则**: 不必要求 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 定理结论为下面的不等式:

$$\liminf_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (4.1.9)$$

(2) 洛必达法则“失效”的情况有哪些? ¹

- 压根不是未定型:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \quad (4.1.10)$$

- 求导后的极限不存在:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \sin x}{1} = \text{Indeterminate} \quad (4.1.11)$$

- 诈尸型 (求导一次后不是未定型):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos x}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1 \quad (4.1.12)$$

- 循环型:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x'}{(\sqrt{x^2 + 1})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \dots \quad (4.1.13)$$

¹参见: <https://www.zhihu.com/question/48935982/answer/155637103>。

- 吸收型:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^5} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^8} = \dots \quad (4.1.14)$$

- 极端复杂型:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^3 + 6e^{-x^2} \sin x - 6x}{3 \ln \frac{1+x}{1-x} - 6x - 2x^3} = \dots \quad (\text{本题要求 6 次导}) \quad (4.1.15)$$

- 变限积分 (本质上还是求导后的极限不存在):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x |\sin t| dt = \lim_{x \rightarrow \infty} |\sin x| = \text{Indeterminate} \quad (4.1.16)$$

- 抽象函数。

4.1.4 Taylor 公式

重要概念回顾 Taylor 多项式: 设 f 在 x_0 处 n 阶可微, 称多项式

$$\mathbb{T} f_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (4.1.17)$$

为 f 在 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式。

重要定理回顾

(1) **Taylor 多项式的性质:** 若 f, g 在 x_0 处 n 阶可微, 则

- **线性:** 对 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则 $\mathbb{T}(\lambda f + \mu g)_{n,x_0} = \lambda \mathbb{T} f_{n,x_0} + \mu \mathbb{T} g_{n,x_0}$
- **线性换元:** 对 $h(t) = f(\lambda t + \mu)$ 及 $t_0 = \frac{x_0 - \mu}{\lambda}$, 成立 $\mathbb{T} h_{n,t_0}(t) = \mathbb{T} f_{n,x_0}(\lambda t + \mu)$ 。
- **导数:** $[\mathbb{T} f_{n,x_0}(x)]' = \mathbb{T}(f')_{n-1,x_0}(x)$ 。

(2) **Peano 余项的 Taylor 公式、Taylor 多项式的唯一性:** 设 f 在 x_0 处 n 阶可微, 则多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \frac{a_2}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{a_n}{n!}(x - x_0)^n \quad (4.1.18)$$

满足 $f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$ 当且仅当 $P_n(x) = \mathbb{T} f_{n,x_0}(x)$, 即 $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ 。

(3) 设 f 在 x_0 处 n 阶可微, $P_n(x)$ 是不超过 n 次的多项式, 则

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0 \quad (4.1.19)$$

当且仅当 $P_n(x_0) = f(x_0)$ 且

$$f'(x) = P'_n(x) + o((x - x_0)^{n-1}), \quad x \rightarrow x_0 \quad (4.1.20)$$

(4) **Lagrange 余项的 Taylor 公式:** 设 f 在区间 I 上 n 阶可微, $x_0 \in I$, 则 $\forall x \in I$, 存在介于 x_0 与 x 之间的 ξ_x 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}(x - x_0)^n \quad (4.1.21)$$

(5) 设 f 在一个含 x_0 在内的区间内有连续的 $n+1$ 阶导函数, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \mathcal{O}((x - x_0)^{n+1}) \quad (4.1.22)$$

应用

(1) 设 f 是偶函数, 在 $x=0$ 处 $2n$ 阶可微, 则 $T_{f,2n,0}(x)$ 是偶函数。

(2) $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$, $a^x = \sum_{k=0}^n \frac{(\ln a)^k}{k!} x^k + o(x^n)$, $x \rightarrow 0$ 。

(3) $\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$, $\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$, $x \rightarrow 0$ 。

(4) $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$, $x \rightarrow 0$, 其中 $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ 。

(5) $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$, $x \rightarrow 0$ 。

(6) $\arctan x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$, $x \rightarrow 0$ 。

(7) $\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$ 。

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x) - \sin \ln(1+x)}{e^{\arcsin x} - 1 - \arcsin(e^x - 1)} = 1$ 。

(9) $y = f(x)$ 在 $P(x_0, f(x_0))$ 处的密切圆半径 $R = \frac{(1+f'(x_0)^2)^{3/2}}{|f''(x_0)|}$, 曲率 $\kappa = \frac{1}{R} = \frac{|f''(x_0)|}{(1+f'(x_0)^2)^{3/2}}$ 。

(10) 已知 $x_{n+1} = \sin x_n$, x_n 的渐近表达式为

$$x_n = \sqrt{\frac{3}{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow +\infty \quad (4.1.23)$$

(11) 用 $(1+x)^\alpha$ 的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式估算 $\sqrt{10}$ 的值。

(12) 证明: $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ 。

(13) 用 Taylor 公式修正圆周率近似值:

$$\pi_{2n} = \frac{\pi_n}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\pi_n^2}{n^2}}}} = n \sin \frac{\pi}{n} = \pi - \frac{\pi^3}{6n^2} + \frac{\pi^5}{120n^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^6}\right) \quad (4.1.24)$$

利用 π_n, π_{2n} 的线性组合消去 $\frac{1}{n^2}$ 项可得

$$\hat{\pi}_{2n} := \pi_{2n} + \frac{1}{3}(\pi_{2n} - \pi_n) = \pi - \frac{\pi^5}{480n^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^6}\right) \quad (4.1.25)$$

这定义了一个外推修正。同理可以定义如下更进一步的外推修正:

$$\pi_{2n}^* = \hat{\pi}_{2n} + \frac{1}{15}(\hat{\pi}_{2n} - \hat{\pi}_n) \quad (4.1.26)$$

注 Taylor 展开定理给出了在一点附近逼近 n 阶可微函数的多项式的存在性和唯一性(在限定次数的情况下); 但是一个函数在一点附近可用多项式逼近, 并不能保证这个函数有高阶可微性, 例如 $f(x) = x^{100} \cdot 1_{x \in \mathbb{Q}} = o(x^{99}), x \rightarrow 0$, 但 f 在 $x = 0$ 处不是二阶可微的。

4.2 雨课堂作业

例 4.2.1 (作业第 1 题)

设 f 在开区间 (a, b) 内可微, $a_n, b_n \in (a, b)$ 满足:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = A$ 。

证明: $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

证明 采用反证法, 若 $\forall x \in (a, b), f'(x) \neq 0$, 则由 Darboux 中值定理知 f' 在 (a, b) 上恒为正或恒为负。不妨设 $f'(x) > 0$, 否则可以考虑 $-f$ 。由于 $a_n > a, b_n < b$ 恒成立, 故可选择严格减的收敛子列 $\{a_{n_k}\}_{k \geq 1}$ 和严格增的收敛子列 $\{b_{n_k}\}_{k \geq 1}$ 并使之满足 $a_{n_1} < b_{n_1}$ 。由极限的保序性可得

$$f(a_{n_1}) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} f(a_{n_k}) = A = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(b_{n_k}) \geq f(b_{n_1}) \quad (4.2.1)$$

由 Lagrange 中值定理可得 $\exists \xi \in (a_{n_1}, b_{n_1}) \subseteq (a, b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b_{n_1}) - f(a_{n_1})}{b_{n_1} - a_{n_1}} \leq 0 \quad (4.2.2)$$

矛盾。由此可知 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$ 。 □

例 4.2.2 (作业第 2 题)

记

$$P_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \quad (4.2.3)$$

证明:

- (1) $P_n(x)$ 是一个 n 次多项式。
- (2) $P_n(x)$ 有 n 个不同的正数根。

证明 (1) 直接利用 Leibniz 公式可得

$$P_n(x) = e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x} \cdot \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{n!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n!)^2}{(n-k)! (k!)^2} x^k \quad (4.2.4)$$

其 n 次项系数为 $(-1)^n$, 故 $P_n(x)$ 是 n 次多项式。

(2) 设 $f(x) = e^{-x}x^n$, 则 $P_n(x) = e^x f^{(n)}(x)$ 。易知 $f^{(k)}(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(k)}(x) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), 反复应用广义 Rolle 定理可得:

- $\exists x_{11} \in (0, +\infty)$ 使得 $f'(x_{11}) = 0$;
- $\exists x_{21} \in (0, x_{11}), x_{22} \in (x_{11}, +\infty)$ 使得 $f''(x_{2i}) = 0$ ($i = 1, 2$);
- ...
- $\exists x_{n1} \in (0, x_{n-1,1}), x_{n2} \in (x_{n-1,1}, x_{n-1,2}), \dots, x_{nn} \in (x_{n-1,n-1}, +\infty)$ 使得 $f^{(n)}(x_{ni}) = 0$ ($i = 1, \dots, n$)。

由此可知 $P_n(x)$ 有 n 个不同的正数根。 □

例 4.2.3 (作业第 3 题)

考虑微分方程 $y' + 5y = 0$, 证明:

- (1) $e^{\lambda x}$ 是该方程的解当且仅当 $\lambda = -5$ 。
- (2) $C(x)e^{5x}$ 是该方程的解当且仅当 $C(x)$ 是常值。

$$(3) \begin{cases} y' + 5y = 0 \\ y(0) = 8 \end{cases} \text{ 有唯一解。}$$

证明 (1) 将 $y = e^{\lambda x}$ 代入方程可得 $(\lambda + 5)e^{\lambda x} = 0$, 从而 $\lambda = -5$ 。

(2) 将 $y = C(x)e^{-5x}$ 代入方程可得 $C'(x)e^{-5x} = 0$, 亦即 $C'(x) \equiv 0$, 从而 $C(x)$ 是常值。因此方程的所有解均具有形式 $y = Ce^{-5x}$, 其中 C 为常数。

(3) 若方程有解, 由 (2) 可知该解为 $y = 8e^{-5x}$ 。验证可知该函数确实是方程的解, 故方程有唯一解。 □

例 4.2.4 (作业第 4 题)

设 f 在有界闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可微, 且 $f(a) = f(b) = 0$ 。证明: $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 2f(\xi)$ 。

证明 参考例 4.4.3。 □

例 4.2.5 (作业第 5 题)

讨论函数 $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^{x+\alpha}$ 的单调性。

解 限定 $x < -1$ 或 $x > 0$, 求导可得

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\alpha} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{\alpha + x}{x(x+1)} \right] =: f(x)g(x) \quad (4.2.5)$$

计算关键节点的值

$$f'(\infty) = 0, \quad f'(-1^-) = \begin{cases} +\infty, & \alpha < 1 \\ -\infty, & \alpha \geq 1 \end{cases}, \quad f'(0^+) = \begin{cases} +\infty, & \alpha \leq 0 \\ -\infty, & \alpha > 0 \end{cases} \quad (4.2.6)$$

对 $g(x)$ 求导可得

$$g'(x) = \frac{\alpha + x(2\alpha - 1)}{x^2(x+1)^2} \quad (4.2.7)$$

记 $x_0 = \frac{\alpha}{1-2\alpha}$, 分情况讨论:

1° 若 $x_0 < -1$, 解得 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, 此时 $2\alpha - 1 > 0$, 故 f' 在 $(-\infty, x_0)$ 上严格减, 在 $(x_0, -1)$ 、 $(0, +\infty)$ 上严格增; 从而 $\exists x_1 \in (x_0, -1)$ 使得 $f'(x_1) = 0$, 当 $x < x_1$ 、 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, 即 f 在 $(-\infty, x_1)$ 、 $(0, +\infty)$ 上严格减; 当 $x_1 < x < -1$ 时, $f'(x) > 0$, 即 f 在 $(x_1, -1)$ 上严格增。

2° 若 $x_0 > 0$, 解得 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, 此时 $2\alpha - 1 < 0$, 故 f' 在 $(-\infty, -1)$ 、 $(0, x_0)$ 上严格增, 在 $(x_0, +\infty)$ 上严格减。

3° 若 $x_0 \in [-1, 0]$, 解得:

- $\alpha \leq 0$, 此时 $2\alpha - 1 < 0$, 故 f' 在 $(-\infty, -1)$ 严格增, 在 $(0, +\infty)$ 上严格减; 故 $f'(x) > 0$ 恒成立, f 在 $(-\infty, -1)$ 、 $(0, +\infty)$ 上严格增。
- $\alpha \geq 1$, 此时 $2\alpha - 1 > 0$, 故 f' 在 $(-\infty, -1)$ 严格减, 在 $(0, +\infty)$ 上严格增; 故 $f'(x) < 0$ 恒成立, f 在 $(-\infty, -1)$ 、 $(0, +\infty)$ 上严格减。

4° 若 x_0 不存在, 解得 $\alpha = \frac{1}{2}$, 此时 f' 在 $(-\infty, -1)$ 、 $(0, +\infty)$ 上严格增。故当 $x < -1$ 时, $f'(x) > 0$, f 在 $(-\infty, -1)$ 上严格增; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, f 在 $(0, +\infty)$ 上严格减。

函数图像可参考图 4.2.1。 □

例 4.2.6 (作业第 6 题)

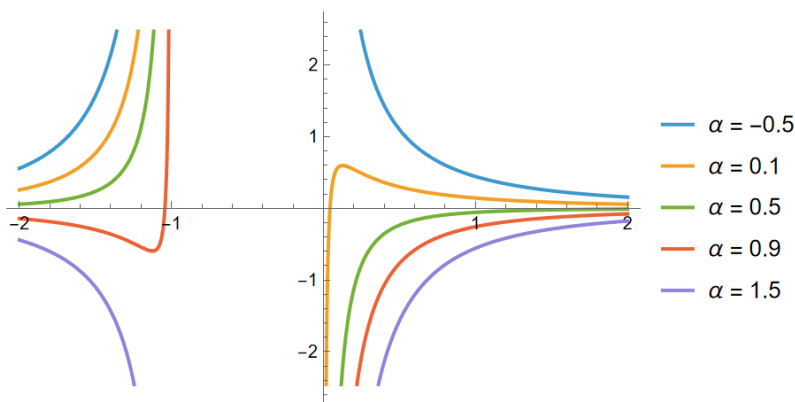
设 $0 < a < b$, 讨论函数 $f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ 的连续性、单调性以及极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。

解 显然 f 在定义域 \mathbb{R}^* 内连续, 并且有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{-x}}{2} \right)^{-\frac{1}{x}} = a, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = b \quad (4.2.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{a^x + b^x}{2} = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x} = \sqrt{ab} \quad (4.2.9)$$

故 $x = 0$ 为可去间断点, 可补充定义 $f(0) = \sqrt{ab}$ 使 f 在 \mathbb{R} 上连续。下面讨论其单调性。

图 4.2.1: 函数 f' 在 $\alpha = -0.5, 0.1, 0.5, 0.9, 1.5$ 的图像

1° 当 $x \neq 0$ 时, 对 f 求导可得

$$f'(x) = \frac{f(x)^{1-x}}{x^2} \cdot g(x), \quad g(x) = \frac{a^x \ln a^x + b^x \ln b^x}{2} - \frac{a^x + b^x}{2} \ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right) \quad (4.2.10)$$

由于 $h(x) = x \ln x$ 为 (下) 凸函数, 利用 Jensen 不等式可知 $g(x) > 0$, 从而 $f'(x) > 0$, 即 f 在 \mathbb{R}^* 上严格增。

2° 当 $x = 0$ 时, 用定义计算 $f'(0)$ 可得

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} - \sqrt{ab}}{x} = \frac{1}{8} \sqrt{ab} \ln^2 \frac{a}{b} > 0 \quad (4.2.11)$$

综上所述, f 在 \mathbb{R} 上严格增。 □

注 f 称为 a, b 的**指数平均数**, $f(-1), f(0), f(1), f(2)$ 分别为 a, b 的**调和平均数**、**几何平均数**、**算术平均数**、**平方平均数**, 由此可得不等式链

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \quad 0 < a < b \quad (4.2.12)$$

该式可推广至任意多个正数 a_1, \dots, a_n 对任意正权重 p_1, \dots, p_n 加权的情形。记 $t_i = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$, 令

$$f(x) := \begin{cases} \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i^x}{\sum_{i=1}^n p_i} \right)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ \left(\prod_{i=1}^n a_i^{p_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}}, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n t_i a_i^x \right)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ \prod_{i=1}^n a_i^{t_i}, & x = 0 \end{cases} \quad (4.2.13)$$

求导可得

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)^{1-x}}{x^2} \left(\sum_{i=1}^n t_i a_i^x \ln a_i^x - \sum_{i=1}^n t_i a_i^x \cdot \ln \sum_{i=1}^n t_i a_i^x \right), & x \neq 0 \\ \frac{f(0)}{2} \left(\sum_{i=1}^n t_i \ln^2 a_i - \sum_{i=1}^n (t_i \ln a_i)^2 \right), & x = 0 \end{cases} \quad (4.2.14)$$

利用 $h(x) = x \ln x$ 的凸性和 Jensen 不等式可知 $f'(x) > 0$ ($x \neq 0$), 利用 Cauchy 不等式以及 $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ 可知 $f'(0) > 0$, 从而 f 在 \mathbb{R} 上严格增。

例 4.2.7 (作业第 7 题)

考虑微分方程 $y'' + y = 0$, 证明:

(1) 如果二阶可微函数 f 是上述方程的解, 则 $(f(x))^2 + (f'(x))^2$ 为常值函数。

(2) 上述微分方程的所有的解都具有如下形式

$$y(x) = A \cos x + B \sin x \quad (4.2.15)$$

其中 A, B 是常数。

证明 (1) 由题可知 $f''(x) = -f(x)$, 故

$$\frac{d}{dx} [(f(x))^2 + (f'(x))^2] = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) = 2f'(x)(f(x) + f''(x)) = 0 \quad (4.2.16)$$

故 $(f(x))^2 + (f'(x))^2$ 为常值函数, 称为能量守恒式。

(2) 设 f 是该方程的解, 记 $C = \sqrt{(f(0))^2 + (f'(0))^2}$, 则由 (1) 可知 $(f(x))^2 + (f'(x))^2 = C^2$ 。

当 $C = 0$ 时, $f \equiv 0$ 是方程的唯一解, 满足形式 $f(x) = 0 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x$ 。

当 $C > 0$ 时, 注意到 f 必不为常函数 (C 或 $-C$), 否则 $f(x) + f''(x) = \pm C \neq 0$ 产生矛盾, 故 $\exists \xi \in \mathbb{R}$ 使得 $|f(\xi)| < C$; 不妨设 $\xi = 0$, 否则可以平移函数。令函数 $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\theta(x) := \arccos \frac{f(x)}{C} \quad (4.2.17)$$

由于 f 可微且 $|f(x)| \leq C$, 故 θ 在 $|f(x)| \neq C$ 时可微, 求导可得

$$f(x) = C \cos \theta(x), \quad f'(x) = -C \sin \theta(x) \cdot \theta'(x) \quad (4.2.18)$$

将 $f(x) = C \cos \theta(x)$ 代入能量守恒式可得

$$f'(x) = \pm C \sin \theta(x) \quad (4.2.19)$$

由于 f' 可微, 故 $f'(x) = C \sin \theta(x)$ 或 $f'(x) = -C \sin \theta(x)$ 必成立其一, 亦即 $\theta'(x) = 1$ 或 $\theta'(x) = -1$ 必成立其一。由于 $\cos \theta = \cos(-\theta)$, 故不妨设 $\theta'(x) = 1$, 则 $\theta(x) = \theta_0 + x$, 亦即

$$f(x) = C \cos(x + \theta_0) = C \cos \theta_0 \cos x - C \sin \theta_0 \sin x = f(0) \cos x + f'(0) \sin x \quad (4.2.20)$$

综上所述, 该方程的所有解都具有形式 $y(x) = A \cos x + B \sin x$ 。 □

例 4.2.8 (作业第 8 题)

考虑微分方程 $xy' - y = 0$, $x > 0$ 。

- (1) 猜出该方程的一个非零解 $y_1(x)$ 。
- (2) 设 $y(x) = C(x)y_1(x)$ 也是该方程的解。求 $C(x)$ 满足的微分方程。
- (3) 求 (2) 中得到的微分方程的所有解, 并给出最初方程的所有解。
- (4) 求最初方程满足 $f(1) = 1$ 的解。
- (5) 设 f 在区间 $(0, +\infty)$ 上可微。证明: 对任意正数 $a < b$, 都存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} \quad (4.2.21)$$

解 (1) 考虑多项式, 观察可知 $y_1(x) = x$ 是该方程的一个非零解。

(2) 将 $y(x) = C(x)x$ 代入方程可得

$$x(C'(x)x + C(x)) - C(x)x = 0 \implies C'(x) = 0 \quad (4.2.22)$$

(3) 由 (2) 可知 $C(x)$ 为常值, 故最初方程的所有解均具有形式 $y(x) = Cx$, 其中 C 为常数。

(4) 由 (3) 可知满足 $f(1) = 1$ 的解为 $f(x) = x$ 。

(5) 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则 g 亦在 $(0, +\infty)$ 上可微, 代入原式可得

$$\xi g(\xi) - \xi[g(\xi) + \xi g'(\xi)] = ab \frac{g(b) - g(a)}{a - b} \implies \frac{g'(\xi)}{-\frac{1}{\xi^2}} = \frac{g(b) - g(a)}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} \quad (4.2.23)$$

由 Cauchy 中值定理可知 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得上式成立。□

例 4.2.9 (作业第 9 题)

证明: 对任意正数 $a > b > 0$, 都有

$$\frac{a - b}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)}} < \arctan a - \arctan b < a - b \quad (4.2.24)$$

证明 令 $\alpha = \arctan a$, $\beta = \arctan b$, 则原式可化为

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\sqrt{(1 + \tan^2 \alpha)(1 + \tan^2 \beta)}} < \alpha - \beta < \tan \alpha - \tan \beta \quad (4.2.25)$$

利用 $\sin x < x$ ($x > 0$) 可得左不等式成立, 利用 Lagrange 中值定理可得 $\exists \xi \in (\beta, \alpha)$ 使得

$$\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\alpha - \beta} = \sec^2 \xi > 1 \quad (4.2.26)$$

故右不等式成立。 \square

例 4.2.10 (习题 5.1.13, 作业第 10 题)

设 $f \in \mathcal{C}^1[0, a]$ 满足 $f(0) = 0$, 且

$$f'(x) \leq 1 + f(x), \quad \forall x \in [0, a] \quad (4.2.27)$$

证明: $\forall x \in [0, a], f'(x) \leq e^x$ 。

证明 由于 $f' \in \mathcal{C}$, 故 $M := \max_{x \in [0, a]} e^{-x} f'(x)$ 良定义。由 Cauchy 中值定理可得 $\exists \xi \in [0, a]$ 使得

$$\frac{f(x) - f(0)}{e^x - 1} = \frac{f'(\xi)}{e^\xi} \leq M \implies f'(x) \leq 1 + f(x) \leq 1 + M(e^x - 1) \quad (4.2.28)$$

若 $M > 1$, 则有

$$e^{-x} f'(x) \leq M + (1 - M)e^{-x} < M \quad (4.2.29)$$

与 M 为最大值矛盾! 故 $M \leq 1$, 即 $f'(x) \leq e^x$ 。 \square

另证 构造函数 $g(x) = e^{-x} f(x)$, 由题可知

$$g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) \leq e^{-x} \quad (4.2.30)$$

故

$$g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t) dt \leq \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x} \quad (4.2.31)$$

即 $f(x) \leq e^x - 1$, 故 $f'(x) \leq e^x$ 。 \square

4.3 补充习题

4.3.1 基本定理

例 4.3.1

试找“最好的”常数 A, B 使得

$$\arctan(1+x) - \frac{\pi}{4} \geq \frac{x}{Ax+B}, \quad \forall x > 0 \quad (4.3.1)$$

解 令 $x \rightarrow +\infty$, 则有

$$\frac{\pi}{4} \geq \frac{1}{A} \implies A \leq \frac{4}{\pi} \quad (4.3.2)$$

记

$$f(x) := \arctan(1+x) - \frac{\pi}{4} - \frac{x}{Ax+B} \quad (4.3.3)$$

则有

$$f'(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{B} \geq 0 \implies B \geq 2 \quad (4.3.4)$$

因此所谓“最好”，就是选择尽可能小的 A, B , 使 $\frac{x}{Ax+B}$ 尽可能大。因此，我们可以选择 $A = \frac{4}{\pi}, B = 2$, 此时

$$f'(x) = -\frac{x[(\pi^2-8)x-2\pi(4-\pi)]}{2[1+(x+1)^2](2x+\pi)^2} \quad (4.3.5)$$

记 $x^* = \frac{2\pi(4-\pi)}{\pi^2-8}$, 则 f 在 $(0, x^*)$ 上严格增, 在 $(x^*, +\infty)$ 上严格减, 故

$$f(x) > \min\{f(0), f(+\infty)\} = 0, \quad \forall x > 0 \quad (4.3.6)$$

即 $A = \frac{4}{\pi}, B = 2$ 就是“最好”的。 \square

例 4.3.2

求满足 $(1 + \frac{1}{n})^{n+\alpha} \leq e \leq (1 + \frac{1}{n})^{n+\beta}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) 的参数 α, β 的取值范围。

解 采用参数分离法。由 \ln 的单调性可得

$$(n+\alpha) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1 \leq (n+\beta) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (4.3.7)$$

因此

$$\alpha \leq f(n) := \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{n})} - n \leq \beta \quad (4.3.8)$$

考虑定义在 $[1, +\infty)$ 上的连续函数 f , 则

$$f'(x) = \frac{1}{x(x+1) \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]^2} - 1 \quad (4.3.9)$$

欲证 $f'(x) > 0$, 只需证

$$\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]^2 < \frac{1}{x(x+1)} \stackrel{t=x^{-1}}{=} (1+t)[\ln(1+t)]^2 < t^2, \quad \forall t \in (0, 1] \quad (4.3.10)$$

考虑定义在 $[0, 1]$ 上的函数 g

$$g(t) := t^2 - (1+t)[\ln(1+t)]^2, \quad t \in (0, 1] \quad (4.3.11)$$

则

$$g'(t) = 2t - \ln(1+t)[2 + \ln(1+t)], \quad g''(t) = \frac{2(t - \ln(1+t))}{1+t} > 0, \quad \forall t \in (0, 1] \quad (4.3.12)$$

因此

$$g'(t) > g'(0) = 0, \quad g(t) > g(0) = 0, \quad \forall t \in (0, 1] \quad (4.3.13)$$

因此 $f'(x) > 0$ 在定义域内成立, 即 f 在定义域内严格增, 故

$$\alpha \leq f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1, \quad \beta \geq f(+\infty) = \frac{1}{2} \quad (4.3.14)$$

其中由 Heine 定理可得

$$f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2} \quad (4.3.15)$$

□

例 4.3.3

证明: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2(n+1)} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma < \frac{1}{2n} \quad (4.3.16)$$

其中 $\gamma := \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n)$ 。

证明 记

$$a_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \frac{1}{2n}, \quad b_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \frac{1}{2(n+1)} \quad (4.3.17)$$

易见 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \gamma$ 。为证明 $a_n < \gamma < b_n$, 我们试图证明 a_n 严格增、 b_n 严格减, 即

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) =: f \left(\frac{1}{n} \right) \\ b_{n+1} - b_n &= \frac{3}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) =: g \left(\frac{1}{n} \right) \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

亦即证明 $\forall x \in (0, 1]$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2} + \frac{x}{2(1+x)} - \ln(1+x) > 0 = f(0) \\ g(x) &= \frac{3x}{2(1+x)} - \frac{x}{2(1+2x)} - \ln(1+x) < 0 = g(0) \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

求导可得

$$f'(x) = \frac{x^2}{2(1+x)^2} > 0, \quad g'(x) = -\frac{x^2(5+8x)}{2(1+x)^2(1+2x)^2} < 0, \quad \forall x \in (0, 1] \quad (4.3.20)$$

故 f, g 分别在 $(0, 1]$ 上严格增、严格减, 即 $f(x) > 0 > g(x)$, 故 $a_n < \gamma < b_n$ 。 □

4.3.2 不定型极限

例 4.3.4

- (1) 设 $f(x)$ 在 x_0 处右连续, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = A \in \mathbb{R}$, 证明 f 在 x_0 处有右导数, 且 $f'_+(x_0) = A$ 。
- (2) 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A \in \mathbb{R}$, 证明 f 在 x_0 处有导数, 且 $f'(x_0) = A$ 。
- (3) 设 f 可微, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = A \in \mathbb{R}$, 若 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时有渐近线, 则渐近线的斜率为 A 。

证明 (1)

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = A \quad (4.3.21)$$

(2)

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A \quad (4.3.22)$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = A \quad (4.3.23)$$

□

例 4.3.5

求以下极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cot x}{\ln x}$ 。

(5) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ 。

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x$, 其中 $\alpha > 0$ 。

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{x^{-2}}$ 。

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$, 其中 $\alpha > 0$ 。

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan \tan x}{\sin x - \sin \sin x}$ 。

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{x^{-1}}$ 。

解 (1) 分析 $\ln \cot x$ 的主项。注意到

$$\ln \cot x = \ln \cos x - \ln \sin x = \ln(1 + o(1)) - \ln[x(1 + o(1))] = -\ln x + o(1) \quad (4.3.24)$$

因此

$$\frac{\ln \cot x}{\ln x} = \frac{-\ln x + o(1)}{\ln x} \rightarrow -1, \quad x \rightarrow 0^+ \quad (4.3.25)$$

(2) 令 $x^\alpha = e^{-t}$, 则 $t = -\alpha \ln x \rightarrow +\infty$, 注意到

$$x^\alpha \ln x = -\frac{t}{\alpha e^t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty \quad (4.3.26)$$

(3) 令 $t = x^\alpha$, 则 $x \rightarrow +\infty$ 时 $t \rightarrow +\infty$, 注意到

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln t}{\alpha t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty \quad (4.3.27)$$

(4) 令 $t = \frac{\pi}{2} - \arctan x$, 则 $\cot t = x$, 且 $x \rightarrow +\infty$ 时 $t \rightarrow 0^+$, 注意到

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{x^{-1}} = \frac{t}{\tan t} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow 0^+ \quad (4.3.28)$$

(5) 令 $x = 1 + t$, 则 $t \rightarrow 0$ 时 $x \rightarrow 1$, 注意到

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} = \frac{(1+t)\ln(1+t) - t}{t \ln(1+t)} = \frac{(1+t)\left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) - t}{t^2 + o(t^2)} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad t \rightarrow 0 \quad (4.3.29)$$

(6) 考虑其自然对数, 注意到

$$\frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} = \frac{\ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{6} + o(x^2)}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{6}, \quad x \rightarrow 0 \quad (4.3.30)$$

因此原极限为 $e^{-\frac{1}{6}}$ 。

(7) 解法一:

$$\frac{\tan x - \tan \tan x}{\sin x - \sin \sin x} = \frac{\tan x - \left(\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + o(\tan^3 x)\right)}{\sin x - \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{6} + o(\sin^3 x)\right)} = \frac{-\frac{\tan^3 x}{3} + o(\tan^3 x)}{\frac{\sin^3 x}{6} + o(\sin^3 x)} \rightarrow -2, \quad x \rightarrow 0 \quad (4.3.31)$$

解法二: 考虑 Lagrange 中值定理, $\exists \xi \in (x, \tan x)$ 和 $\eta \in (\sin x, x)$ 使得

$$\frac{\tan x - \tan \tan x}{\sin x - \sin \sin x} = \frac{\sec^2 \xi x - \tan x}{\cos \eta x - \sin x} = \frac{\sec^2 \xi x - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{\cos \eta x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)} \rightarrow -2, \quad x \rightarrow 0 \quad (4.3.32)$$

□

例 4.3.6

以下解答正确吗? 为什么?

(1) 以下极限不存在:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x^2}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \cos x^2}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^{\frac{3}{2}} \cos x^2 \quad (4.3.33)$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin 2x}{e^{\sin x}(2x + \sin 2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \cos^2 x}{e^{\sin x}(2x + \sin 2x + 4 \cos x) \cos x} = 0 \quad (4.3.34)$$

解 (1) 不正确, 不能由“导数比值不存在”推出“原极限不存在”。正确的极限为 0。

(2) 不正确, 因为 $g'(x) \neq 0$ 不成立。原极限显然不存在。

□

4.3.3 Taylor 展开式 (一)

例 4.3.7

(1) 写出 $\sin x, \cos x$ 在 $x=0$ 处带 5 阶 Peano 余项的 Taylor 展开式。

(2) 写出 $\tan x$ 在 $x=0$ 处带 5 阶 Peano 余项的 Taylor 展开式。

(3) 设 $f, g \in \mathcal{C}^\infty$ 满足

$$\begin{aligned} f(x) &= x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + o(x^7), \quad x \rightarrow 0 \\ g(x) &= x + b_3x^3 + b_5x^5 + b_7x^7 + o(x^7), \quad x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

请写出 $f(g(x))$ 在 $x=0$ 处带 7 阶 Peano 余项的 Taylor 展开式。

(4) 设 $f \in \mathcal{C}^\infty$ 是可逆的奇函数, 且

$$f(x) = x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + o(x^7), \quad x \rightarrow 0 \quad (4.3.36)$$

请写出 f^{-1} 在 $x=0$ 处带 7 阶 Peano 余项的 Taylor 展开式。

(5) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \tan x - \tan \sin x}{\arcsin \arctan x - \arctan \arcsin x} \quad (4.3.37)$$

(6) 求 $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处带 5 阶 Peano 余项的 Taylor 展开式。

解 (1)(2)(6)

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \\ \frac{\sin x}{1+x^2} &= x - \frac{7x^3}{6} + \frac{47x^5}{40} + o(x^5) \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

(3) 直接展开可得

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= x + (a_3 + b_3)x^3 + (a_5 + 3a_3b_3 + b_5)x^5 \\ &\quad + (a_7 + 5a_5b_3 + 3a_3b_3^2 + 3a_3b_5 + b_7)x^7 + o(x^7) \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

(4) 采用待定系数法可得

$$f^{-1}(x) = x - a_3x^3 + (3a_3^2 - a_5)x^5 + (-12a_3^3 + 8a_3a_5 - a_7)x^7 + o(x^7) \quad (4.3.40)$$

(5) 由 (3) 可知

$$f(g(x)) - g(f(x)) = (3a_3b_3^2 - 3b_3a_3^2 - 2a_3b_5 + 2a_5b_3)x^7 + o(x^7) \quad (4.3.41)$$

故 $f \circ g - g \circ f$ 是 7 阶无穷小。同理可得

$$f^{-1}(g^{-1}(x)) - g^{-1}(f^{-1}(x)) = (3a_3b_3^2 - 3b_3a_3^2 - 2a_3b_5 + 2a_5b_3)x^7 + o(x^7) \quad (4.3.42)$$

即 $f^{-1} \circ g^{-1} - g^{-1} \circ f^{-1}$ 与 $f \circ g - g \circ f$ 具有相同的 7 阶无穷小形式, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \tan x - \tan \sin x}{\arcsin \arctan x - \arctan \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(g(x)) - g(f(x))}{f^{-1}(g^{-1}(x)) - g^{-1}(f^{-1}(x))} = 1 \quad (4.3.43)$$

□

例 4.3.8

计算以下极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sqrt{1-2x} - \cos(\sqrt{2x})}{\sin^3 x}.$$

$$(6) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) + 2f(-h) - 3f(0)}{h^2}, \text{ 其中 } f''(0) = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{n+n^\alpha} - \sin \sqrt{n}).$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (\tan x)^{\pi/2-x}.$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(2\pi\sqrt{n^2 + \alpha n}).$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) \ln(1+x) \right].$$

解 (1)

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) - (1 - x^2 + o(x^3))}{x^3(1 + o(1))^3} \\ &= \frac{-\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \rightarrow -\frac{4}{3}, \quad x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

(2)

$$\text{LHS} = \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)}{x^4} \rightarrow -\frac{1}{12}, \quad x \rightarrow 0 \quad (4.3.45)$$

(3) 令 $t = x - 1 \rightarrow 0$, 则

$$x^{\frac{1}{1-x}} = \exp \frac{\ln(1+t)}{-t} = \exp(-1 + o(1)) \rightarrow \frac{1}{e}, \quad t \rightarrow 0 \quad (4.3.46)$$

(4) 令 $t = \frac{\pi}{2} - x$, 则

$$(\tan x)^{\pi/2-x} = \exp(t \ln \cos t - t \ln \tan t) = \exp(o(1)) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow 0 \quad (4.3.47)$$

(5)

$$\text{LHS} = \frac{x - (1-x)\ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1-x)\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} \rightarrow \frac{3}{2}, \quad x \rightarrow 0 \quad (4.3.48)$$

(6)

$$\text{LHS} = \frac{a_0 + a_1(2h) + \frac{(2h)^2}{2} + o(h^2) + 2a_0 + 2a_1(-h) + (-h)^2 + o(h^2) - 3a_0}{h^2} \rightarrow 3, \quad h \rightarrow 0 \quad (4.3.49)$$

(7)

$$\text{LHS} = \frac{3x^2}{\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\right)} \rightarrow 4, \quad x \rightarrow 0 \quad (4.3.50)$$

(8) 当 $\alpha < \frac{1}{2}$ 时, 由 Lagrange 中值定理可得 $\exists \xi \in (n, \sqrt{n+n^\alpha})$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \cos \xi \cdot [\sqrt{n+n^\alpha} - \sqrt{n}] = \cos \xi \cdot \sqrt{n} \left[(1+n^{\alpha-1})^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \\ &= \cos \xi \cdot \left[\frac{1}{2}n^{\alpha-\frac{1}{2}} + o\left(n^{\alpha-\frac{1}{2}}\right) \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (4.3.51)$$

当 $\alpha = \frac{1}{2}$, 注意到

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{1}{2} + o(1) \implies \text{LHS} = \sin\left(\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right) - \sin\sqrt{n} + o(1), \quad n \rightarrow +\infty \quad (4.3.52)$$

由 $\{\sin n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 在 $[-1, 1]$ 上的稠密性知 $\{\sin \sqrt{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 在 $[-1, 1]$ 上也是稠密的, 故存在子列 $\{\sin \sqrt{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ 收敛于 1, 此时原数列收敛于 $\cos \frac{1}{2} - 1$; 也存在子列 $\{\sin \sqrt{m_k}\}_{m_k \in \mathbb{N}}$ 收敛于 -1 , 此时原数列收敛于 $-\cos \frac{1}{2} + 1$ 。因此原极限不存在。

当 $\alpha > \frac{1}{2}$, 由函数图像 (图 4.3.1) 可知该极限不存在。

(9) 注意到

$$2\pi\sqrt{n^2 + \alpha n} = 2\pi n \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\pi n + \alpha\pi + o(1), \quad n \rightarrow +\infty \quad (4.3.53)$$

因此

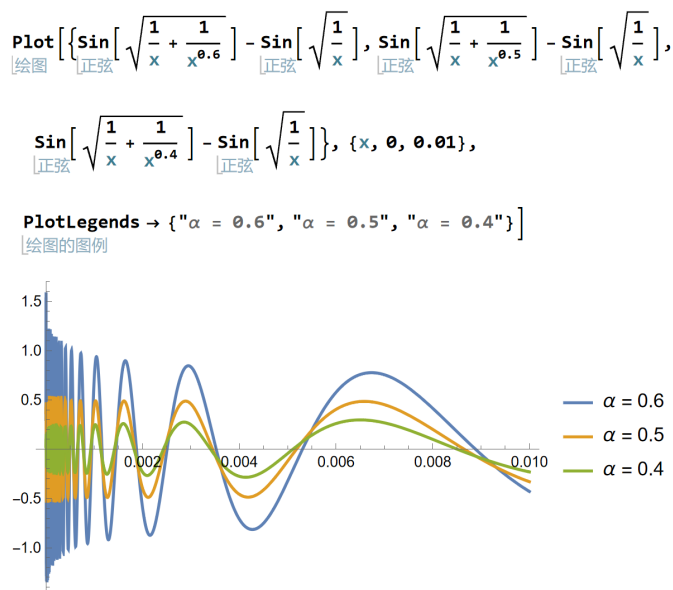
$$\sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + \alpha n}\right) = \sin(\alpha\pi + o(1)) \rightarrow \sin(\alpha\pi), \quad n \rightarrow +\infty \quad (4.3.54)$$

□

例 4.3.9

设 $f \in \mathcal{C}[a, b]$, 在 (a, b) 上二阶可导, 证明 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi) \quad (4.3.55)$$

图 4.3.1: $\sin \sqrt{x^{-1} + x^{-\alpha}} - \sin \sqrt{x^{-1}}$ 的函数图像

证明 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 处作带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, $\exists \xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$ 和 $\xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$ 使得

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 \\ f(b) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (4.3.56)$$

两者相加可得

$$f(a) + f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2} \frac{(b-a)^2}{4} \quad (4.3.57)$$

由 Darboux 定理可知 $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (a, b)$ 使得 $f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}$, 因此

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi) \quad (4.3.58)$$

□

另证 构造二次函数 $g(x) = Ax^2 + Bx + C$ 满足

$$g(a) = f(a), \quad g\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad g(b) = f(b) \quad (4.3.59)$$

令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则 $F(b) = F\left(\frac{a+b}{2}\right) = F(a) = 0$, 且待证命题等价于

$$[F(b) + g(b)] - 2\left[F\left(\frac{a+b}{2}\right) + g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] + [F(a) + g(a)] = \frac{(b-a)^2}{4} [F''(\xi) + g''(\xi)] \quad (4.3.60)$$

注意到

$$g(b) - 2g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(a) = \frac{1}{2}(b-a)^2 A = \frac{(b-a)^2}{4} g''(\xi) \quad (4.3.61)$$

故待证命题等价于

$$\frac{(b-a)^2}{4} F''(\xi) = F(b) - 2F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F(a) = 0 \iff F''(\xi) = 0 \quad (4.3.62)$$

由于 $F(b) = F\left(\frac{a+b}{2}\right) = F(a) = 0$, 故由 Rolle 定理可得

$$\exists \xi_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right), F'(\xi_1) = 0; \quad \exists \xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right), F'(\xi_2) = 0 \quad (4.3.63)$$

从而由 Rolle 定理可得

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (a, b), F''(\xi) = 0 \quad (4.3.64)$$

□

例 4.3.10

证明: $\frac{3}{2} < \tan 1 < \frac{\pi}{2}$ 。

证明 留作习题。

□

例 4.3.11

设 f 在含 0 的开区间 I 上有连续的 $n+1$ 阶导数, $f(0) = 0$, 定义

$$F(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \in I \setminus \{0\} \\ f'(0), & x = 0 \end{cases} \quad (4.3.65)$$

证明: F 在 I 内有连续的 n 阶导数。

证明 设 $I = (a, b)$, 其中 $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$ 。当 $x \neq 0$ 时,

$$F^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x)}{j!} (-x)^j \implies F \in \mathcal{C}^k(a, 0), F \in \mathcal{C}^k(0, b) \quad (4.3.66)$$

而当 $x \rightarrow 0$ 时, 在 x 处作带 Lagrange 余项的 Taylor 展开可得, 存在位于 $0, x$ 之间的 ξ 使得

$$f(0) = f(x) + f'(x)(-x) + \cdots + \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (-x)^k + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (-x)^{k+1} \quad (4.3.67)$$

故有

$$F^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} \left[f(0) - \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (-x)^{k+1} \right] = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k+1} \rightarrow \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}, \quad x \rightarrow 0 \quad (4.3.68)$$

所以由导数定义和 L'Hôpital 法则可得

$$F^{(k)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F^{(k-1)}(x) - \frac{f^{(k)}(0)}{k}}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} F^{(k)}(x) = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1} \quad (4.3.69)$$

归纳可知 $F \in \mathcal{C}^k(I)$, 故 $F \in \mathcal{C}^n(I)$. □

例 4.3.12

设 $f \in \mathcal{C}^\infty$, 定义

$$F(x) := \begin{cases} f\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right), & x \neq 0 \\ f(0), & x = 0 \end{cases} \quad (4.3.70)$$

求 F 在 $x = 0$ 处带 n 阶 Peano 余项的 Taylor 展开式。

解 归纳可证

$$g(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (4.3.71)$$

为 \mathcal{C}^∞ 函数, 因此 $F = f \circ g \in \mathcal{C}^\infty$ 。注意到

$$|f(g(x)) - f(0)| \leq |f'(\xi)| |g(x) - 0| \leq M e^{-\frac{1}{x^2}} = o(x^n), \quad 0 < |x| \leq 1 \quad (4.3.72)$$

因此

$$F(x) = f(g(x)) = f(0) + o(x^n), \quad x \rightarrow 0 \quad (4.3.73)$$

由带 Peano 余项的 Taylor 展开式的唯一性可知, 这就是 F 在 $x = 0$ 处带 n 阶 Peano 余项的 Taylor 展开式。□

4.3.4 积分因子、微分方程与辅助函数

例 4.3.13

证明: $e^{-\lambda x}$ 是微分方程

$$y' - \lambda y = 0 \quad (4.3.74)$$

的积分因子。

证明 代入验证可得

$$(e^{-\lambda x} y)' = e^{-\lambda x} (y' - \lambda y) = 0 \quad (4.3.75)$$

从而微分方程的解为 $y = C e^{\lambda x}$. □

例 4.3.14

求微分方程

$$y' + g'(x)y = 0 \quad (4.3.76)$$

的积分因子。

证明 代入验证可得

$$(e^{g(x)}y)' = e^{g(x)}(y' + g'(x)y) = 0 \quad (4.3.77)$$

从而微分方程的解为 $y = Ce^{-g(x)}$ 。 □

例 4.3.15

设 f, g 可微, g 有界且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0) = 0 \quad (4.3.78)$$

证明: $\exists \xi > 0$ 使得

$$f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0 \quad (4.3.79)$$

证明 令 $F(x) := e^{g(x)}f(x)$, 则 F 可微, 且 $F(0) = F(+\infty) = 0$, 由广义 Rolle 定理可知 $\exists \xi > 0$ 使得

$$F'(\xi) = e^{g(\xi)}[f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi)] = 0 \implies f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0 \quad (4.3.80)$$

□

例 4.3.16

设 f 可微, 满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) + f(x)] = a \quad (4.3.81)$$

证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 \quad (4.3.82)$$

证明 令 $F(x) := e^x f(x)$, $G(x) := e^x$, 则 F, G 可微且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) + f(x)] = a \quad (4.3.83)$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = a - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (4.3.84)$$

□

4.4 讲义习题

4.4.1 微分中值定理

例 4.4.1 (习题 5.1.5)

如图 4.4.1 所示, 在以线段 AB 为直径的半圆周上, DE 是沿这个半圆周移动的一条弦, 其长度是定值。 M 是这条弦的中点, F, G 是 D, E 在直径 AB 上的垂直投影。证明: 三角形 MFG 是一个形状固定的等腰三角形。

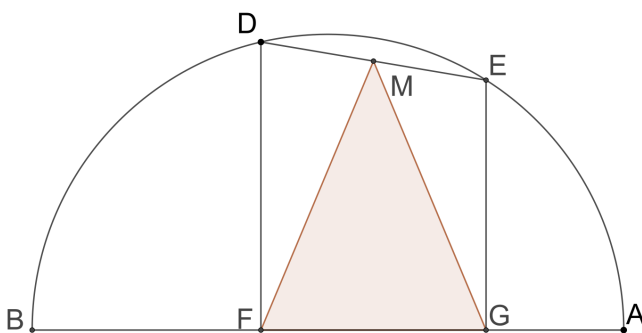


图 4.4.1: 习题 5.1.3 图示

证明 设圆的圆心为 O 。由垂径定理可得 $\angle OMD = 90^\circ = \angle OFD$, 故 $OMDF$ 共圆, 由“等弧对等角”可得 $\angle OFM = \angle ODM = \arccos \frac{|DE|}{|AB|} = \text{const}$. \square

例 4.4.2 (习题 5.1.6)

线性微分方程与常数变易法。

(1) 证明: $e^{\lambda x}$ 是 n 阶常系数线性常微分方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (4.4.1)$$

的解当且仅当 λ 是多项式 $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$ 的根。这个多项式称为该微分方程的 特征多项式, 它的根称为该微分方程的 特征值 或 特征指数。

(2) 常数变易法。设 λ 是微分方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (4.4.2)$$

的特征值, 证明: $y(x) = C(x)e^{\lambda x}$ 是微分方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(x) \quad (4.4.3)$$

的解当且仅当 $C'(x)$ 是一个 $n-1$ 阶常系数线性常微分方程的解, 并求这个 $n-1$ 阶常系数线性常微分方程。

(3) 证明: $y(x)$ 是微分方程 $y' - \lambda y = 0$ 的解当且仅当存在常数 C 使得 $y(x) = Ce^{\lambda x}$ 。

(4) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的所有解。一般地, 若 $a^2 > 4b$, 求微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的所有解。

(5) 求微分方程 $y'' - 2ay' + a^2y = 0$ 的所有解。

解 (1) $e^{\lambda x}$ 是该微分方程的解等价于

$$e^{\lambda x}(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0) = 0 \quad (4.4.4)$$

由于 $e^{\lambda x} > 0$, 故上式等价于

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (4.4.5)$$

(2) 设 $a_n = 1$, $y(x) = C(x)e^{\lambda x}$ 是微分方程的解等价于

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} C^{(j)}(x) \lambda^{i-j} e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^n C^{(j)}(x) \sum_{i=j}^n \binom{i}{j} a_i \lambda^{i-j} = 0 \quad (4.4.6)$$

由于 $e^{\lambda x} > 0$, 故上式等价于

$$\sum_{j=0}^n C^{(j)}(x) \sum_{i=j}^n \binom{i}{j} a_i \lambda^{i-j} = 0 \quad (4.4.7)$$

注意到当 $j=0$ 时, 有

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{0} a_i \lambda^i = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (4.4.8)$$

因此 C' 需满足以下 $n-1$ 阶常系数线性常微分方程的解

$$\sum_{j=1}^n (C')^{(j-1)}(x) \sum_{i=j}^n \binom{i}{j} a_i \lambda^{i-j} = 0 \quad (4.4.9)$$

(3) 考虑函数 $f(x) := y(x)e^{-\lambda x}$, 其中 $y(x)$ 为微分方程的解, 代入验证可得

$$f'(x) = y'(x)e^{-\lambda x} - \lambda y(x)e^{-\lambda x} = [y'(x) - \lambda y(x)]e^{-\lambda x} = 0 \quad (4.4.10)$$

由 Lagrange 中值定理可得 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 均 $\exists \xi \in \mathbb{R}$ 位于 $0, x$ 之间使得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = 0 \quad (4.4.11)$$

故 $\forall x \in \mathbb{R}$ 均有 $f(x) = f(0)$, 即 $f(x) \equiv C$ 。因此 $y(x) = Ce^{\lambda x}$ 。

(4) 该微分方程的特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 解得对应的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ 。考虑函数 $f(x) := y(x)e^{-x}$, 其中 $y(x)$ 为微分方程的解, 代入验证可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= [y'(x) - y(x)]e^{-x} \\ f''(x) &= [y''(x) - 2y'(x) + y(x)]e^{-x} \\ \implies f''(x) - f'(x) &= [y''(x) - 3y'(x) + 2y(x)]e^{-x} = 0 \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

由 (3) 可知 f' 的通解为 $f'(x) = C_1e^x$ 。考虑函数 $g(x) := f(x) - C_1e^x$, 则 $g'(x) = 0$, 故 $g(x) = C_2 = \text{const}$, 亦即

$$y(x) = f(x)e^x = [g(x) + C_1e^x]e^x = C_1e^{2x} + C_2e^x \quad (4.4.13)$$

类似可得当 $a^2 - 4b > 0$ 时, $y'' + ay' + by = 0$ 的所有解为

$$y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad (4.4.14)$$

(5) 该微分方程的特征方程为 $\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0$, 解得对应的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ 。考虑函数 $f(x) := y(x)e^{-ax}$, 其中 $y(x)$ 为微分方程的解, 代入验证可得

$$f''(x) = [y''(x) - 2ay'(x) + a^2y(x)]e^{-ax} = 0 \quad (4.4.15)$$

故 $f'(x) \equiv f'(0)$ 。考虑函数 $g(x) := f(x) - f'(0)x$, 则 $g'(x) = 0$, 故 $g(x) \equiv g(0) = f(0)$ 。因此

$$y(x) = f(x)e^{ax} = [f(0) + f'(0)x]e^{ax} = (C_1 + C_2x)e^{ax} \quad (4.4.16)$$

□

例 4.4.3 (习题 5.1.7)

设函数 f 在区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 中可微, $f(a) = f(b) = 0$ 。证明对任意实数 λ , $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$ 。

证明 考虑函数 $g(x) := f(x)e^{\lambda x}$, 则 $g(a) = g(b) = 0$, 由 Rolle 定理可知 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $g'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$ 。□

4.4.2 函数的单调性与极值

例 4.4.4 (习题 5.2.2)

设 $0 < a < b$, 试比较 a^b 与 b^a 的大小。

解 原题等价于

$$a^b \leq b^a \iff \frac{\ln a}{a} \leq \frac{\ln b}{b} \quad (4.4.17)$$

考虑函数 $f(x) := \frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, 故 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上严格减, 在 $(e, +\infty)$ 上严格增。因此:

- 当 $0 < a < b \leq e$ 时, $f(a) > f(b)$, 故 $a^b > b^a$;
- 当 $e \leq a < b$ 时, $f(a) < f(b)$, 故 $a^b < b^a$ 。
- 当 $0 < a < e < b$ 时, a^b 与 b^a 的大小关系不确定, 取决于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的大小关系。

□

例 4.4.5 (习题 5.2.6)

设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 比较 $\frac{x}{\sin x}$ 和 $\frac{\tan x}{x}$ 的大小。

解 原题等价于

$$\frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{x} \iff \cos x \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad (4.4.18)$$

注意到

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} < 1 - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}\right)^2 < \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^2 < \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad (4.4.19)$$

其中用到了

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} > 0, \quad \forall x \in (0, 2) \quad (4.4.20)$$

□

例 4.4.6 (习题 5.2.11)

混合抽样 (Sample Pooling) 可以在数量众多的群体中快速查找患病个体, 做法是: 先把人群分组, 每组样本混合后进行一次检验; 如果检验结果呈阳性, 那么再对该组成员进行逐一检验。试讨论:

- (1) 混合抽样是否可以提高检验效率?
- (2) 为了最大可能提高检验效率, 如何确定分组人数?

解 设人群的总个体数为 n , 患病个体的比例为 p , 每组的人数为 $x \ll n$ 。我们对模型作适当简化: 假设检验的误检率为 0。

(1) 若对每个个体依次检验, 则所需的检验数为 n ; 若采用混合抽样, 则组数近似为 $\frac{n}{x}$ 、混合检验结果为阳性的概率为 $1 - (1-p)^x$, 故所需检验数的期望 $f(x)$ 近似为

$$f(x) = \frac{n}{x} [1 + x(1 - (1-p)^x)] = \frac{n}{x} + n(1 - (1-p)^x) \quad (4.4.21)$$

视 f 为关于 x 的连续函数, 则有

$$f'(x) = -\frac{n}{x^2} - n \ln(1-p)(1-p)^x = -\frac{n}{x^2} [1 + x^2(1-p)^x \ln(1-p)] \quad (4.4.22)$$

当 $x > 0$ 时, 显然 $1 + x^2(1-p)^x \ln(1-p)$ 严格增, 故 $\exists \xi \in (0, +\infty)$ 满足 $f'(\xi) = 0$, 此时

$$\frac{f(x)}{n} \geq \frac{f(\xi)}{n} = \frac{1}{\xi} + 1 - (1-p)^\xi = 1 + \frac{1 + \xi \ln(1-p)}{\xi^2 \ln(1-p)} \quad (4.4.23)$$

注意到

$$f' \left(-\frac{1}{\ln(1-p)} \right) = -n \ln^2(1-p) \left[1 + \frac{e^{-1}}{\ln^2(1-p)} \right] < 0 \Rightarrow \xi > -\frac{1}{\ln(1-p)} \quad (4.4.24)$$

因此 $f(\xi) < 1$, 即选择合适的分组人数可以提高检验效率。

(2) 如上所述, 分组人数的最佳值 ξ 应当满足

$$\xi^2(1-p)^\xi \ln(1-p) = -1 \quad (4.4.25)$$

其正数解可以表示为

$$\xi = \frac{2}{\ln(1-p)} W \left(-\frac{\sqrt{-\ln(1-p)}}{2} \right) \quad (4.4.26)$$

其中 W 为 Lambert W 函数, 为 $y = xe^x$ 在 $[-1, +\infty)$ 上的反函数。注意到

$$xe^x = x + x^2 + o(x^2) \Rightarrow W(x) = x - x^2 + o(x^2) \quad (4.4.27)$$

因此 ξ 在 $p \rightarrow 0^+$ 的级数展开为

$$\begin{aligned} \xi(p) &= \frac{2}{-p + o(p)} \left[-\frac{\sqrt{p + o(p^{3/2})}}{2} - \frac{p + o(p)}{4} + o(p) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} (1 + o(1))^{-1} \left[(1 + o(\sqrt{p}))^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{p}}{2} + o(\sqrt{p}) \right] = \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

故当患病人群比例 p 足够小时, 可取每组的人数为最接近 $\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{2}$ 的整数。□

例 4.4.7 (习题 5.2.12)

Young 不等式。设正数 p, q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 证明: $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, 都成立不等式

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy \quad (4.4.29)$$

并讨论等号成立的条件。

证明 考虑函数

$$f(x) := \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy \quad (4.4.30)$$

则有

$$f'(x) = x^{p-1} - y = 0 \implies \xi = y^{\frac{1}{p-1}} \quad (4.4.31)$$

由于 $p > 1$, 故 f' 在 \mathbb{R}^+ 严格增, 因此 $f(x)$ 在 $x = \xi$ 处取得最小值, 满足

$$f(x) \geq f(\xi) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}+1} = \frac{y^q}{p} + \frac{y^q}{q} - y^q = 0 \quad (4.4.32)$$

亦即

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy \quad (4.4.33)$$

等号成立时, 须有

$$x = y^{\frac{1}{p-1}} \implies x^p = y^{\frac{p}{p-1}} = y^q \quad (4.4.34)$$

□

4.5 教材习题

例 4.5.1 (刘/闫/章·习题 4.1.3)

设 f 在 \mathbb{R} 上有 n 阶导数, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 为一个 n 次多项式, 如果存在 $n+1$ 个不同的点 x_1, \cdots, x_{n+1} 使得 $f(x_i) = p(x_i)$ ($i = 1, \cdots, n+1$), 则 $\exists \xi \in \mathbb{R}$ 使得 $a_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.

证明 考虑函数 $g(x) := f(x) - p(x)$, 其有 $n+1$ 个不同的零点. 不断使用 Rolle 定理归纳可得当 $0 \leq k \leq n$ 时, $g^{(k)}$ 存在 $n+1-k$ 个零点. 取 $k = n$, 则 $\exists \xi \in \mathbb{R}$ 使得

$$g^{(n)}(\xi) = 0 \implies f^{(n)}(\xi) = p^{(n)}(\xi) = n! a_n \implies a_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad (4.5.1)$$

□

例 4.5.2 (刘/闫/章·习题 4.1.7)

设函数 f 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$, 且 $\exists c \in (a, b)$ 使得 $f(c) > 0$. 试证明 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) < 0$.

证明 由 Lagrange 中值定理可得: $\exists \xi_1 \in (a, c)$ 和 $\exists \xi_2 \in (c, b)$ 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} > 0, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} < 0 \quad (4.5.2)$$

再由 Lagrange 中值定理可得: $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (a, b)$ 使得

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0 \quad (4.5.3)$$

□

例 4.5.3 (刘/闫/章· 习题 4.1.12)

设 f 在 \mathbb{R} 上可导, 且满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty$, 证明: $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \xi \in \mathbb{R}$ 使得 $f'(\xi) = a$.

证明 首先证明 f' 无上界. 若 f' 有上界 M , 考虑函数 $g(x) := f(x) - Mx$, 则 $g'(x) := f'(x) - M \leq 0$, 即 g 单调不增, 此时有

$$g(x) \leq g(0) \Rightarrow f(x) - Mx \leq f(0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Mx + f(0)}{x} = M \quad (4.5.4)$$

与题设矛盾! 故 f' 无上界. 同理可证 f' 无下界.

$\forall a \in \mathbb{R}$, $|a|$ 不是 f' 的上界, $-|a|$ 不是 f' 的下界, 故 $\exists \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ 使得 $f'(\xi_1) < -|a| \leq a \leq |a| < f'(\xi_2)$, 由 Darboux 定理可知 $\exists \xi \in \mathbb{R}$ 位于 ξ_1, ξ_2 之间使得 $f'(\xi) = a$. \square

例 4.5.4 (刘/闫/章· 习题 4.1.15)

证明:

- (1) 若 f 在 x_0 处连续, 在 x_0 的某个去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) = A$.
- (2) 若 f 在区间 I 内可导, 则 f' 在区间内不存在第一类间断点.

证明 (1) 由 L'Hôpital 法则可得

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A \quad (4.5.5)$$

(2) 假设 f' 存在第一类间断点 x_0 , 此时 f' 在 x_0 处的左、右极限均存在. 由于 f 在 I 上可导, 由 L'Hôpital 法则可得

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x), \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \quad (4.5.6)$$

由于 f 可导, 故 $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, 由此导出 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$, 与 f' 在 x_0 处间断矛盾! 故 f' 不存在第一类间断点. \square

例 4.5.5 (刘/闫/章· 习题 4.2.2)

求下列极限:

- | | | |
|---|---|---|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}$ | (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)}$ | (15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \arctan x) \ln x$ |
| (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$ | (9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$ | (16) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{1+x}{x}$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sqrt{1+2\cos x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$ | (10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2}$ | (17) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{x} - 1\right)^{\tan x}$ |
| (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x^2}$ | (11) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$ | (18) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\ln x}$ |
| (5) $\lim_{x \rightarrow 2^{-1/2}} \frac{(\arcsin x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2 - 1}$ | (12) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sec x - \tan x)$ | (19) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ |
| (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ | (13) $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \tan \frac{\pi x}{2}$ | (20) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right]$ |
| (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{\ln(1+x^2)}$ | (14) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ | |

解 仅给出答案。

- | | | | | |
|--------|------------------------------------|--------------------|-----------------------|---------------------|
| (1) 2 | (5) $\frac{\pi}{4}$ | (9) $-\frac{1}{2}$ | (13) $-\frac{2}{\pi}$ | (17) $e^{4/\pi}$ |
| (2) 1 | (6) $\frac{1}{6}$ | (10) 0 | (14) 0 | (18) 1 |
| (3) -1 | (7) $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$ | (11) 0 | (15) 0 | (19) $e^{-1/2}$ |
| (4) 0 | (8) $\frac{1}{2}$ | (12) 0 | (16) 1 | (20) $-\frac{e}{2}$ |

□

例 4.5.6 (刘/闫/章·习题 4.3.4 节选)

写出下列函数在指定点的 Taylor 多项式。

- (1) $y = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $x_0 = 0$, 展开到 4 次。
- (2) $y = \ln \cos x$, $x_0 = 0$, 展开到 6 次。
- (3) $y = (x-1)^3 \ln x$, $x_0 = 1$, 展开到 30 次。
- (4) $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $x_0 = 0$, 展开到 n 次。

解 (1)

$$\begin{aligned}
 y &= 1 + 2x(1-x+x^2)^{-1} = 1 + 2x [1 + (x-x^2) + (x-x^2)^2 + x^3 + o(x^3)] \\
 &= 1 + 2x [1 + x - x^2 + x^2 - 2x^3 + x^3 + o(x^3)] = 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)
 \end{aligned} \tag{4.5.7}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 y &= \ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \right) \\
 &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{2} \right)^3 + o(x^6) \\
 &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} - \frac{x^6}{24} + o(x^6) \\
 &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)
 \end{aligned} \tag{4.5.8}$$

(3) 取 $n = 30$, 令 $t = x - 1 \rightarrow 0$, 则

$$y = t^3 \ln(1+t) = t^3 \left(\sum_{k=1}^{n-3} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k + o(t^{n-3}) \right) = \sum_{k=1}^{n-3} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^{k+3} + o(t^n) \tag{4.5.9}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1 + (-1)^{k-1}}{2k} x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^n)
 \end{aligned} \tag{4.5.10}$$

□

例 4.5.7 (刘/闫/章· 习题 4.3.5)

求下列极限:

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$ 。
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2}$ 。
- (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$ 。
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - \tan(\tan x)}{\sin x - \tan x}$ 。

解 (1) 令 $t = x^{-1} \rightarrow 0$, 则

$$\text{LHS} = \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{t - \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right)}{t^2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad t \rightarrow 0 \tag{4.5.11}$$

(2)

$$\text{LHS} = \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) \right)}{\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - 1 - x^2 + o(x^2) \right) (x^2 + o(x^2))} \rightarrow -\frac{1}{12}, \quad x \rightarrow 0 \tag{4.5.12}$$

(3) 令 $t = x^{-1/2} \rightarrow 0^+$, 则

$$\text{LHS} = \frac{(1+t^2)^{1/2} + (1-t^2)^{1/2} - 2}{t^4} = \frac{1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8} + 1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8} - 2 + o(t^4)}{t^4} \rightarrow -\frac{1}{4}, \quad t \rightarrow 0 \quad (4.5.13)$$

(4)

$$\text{LHS} = \frac{x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{6} \sin^3 x - x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \tan^3 x + o(x^3)}{x - \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \rightarrow 2, \quad x \rightarrow 0 \quad (4.5.14)$$

□

例 4.5.8 (刘/闫/章·习题 4.3.6)

当 $x \rightarrow 0$ 时, 求无穷小量 $\ln(1 + \sin x^2) + \alpha(\sqrt[3]{2 - \cos x} - 1)$ 的阶。

解 注意到

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \sin(x^2) - \frac{1}{2} \sin^2(x^2) + o(x^4) + \alpha \left[\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^{1/3} - 1 \right] \\ &= x^2 - \frac{1}{2} x^4 + \alpha \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \right) - \frac{1}{9} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 - 1 \right] + o(x^4) \\ &= \left(1 + \frac{\alpha}{6} \right) x^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{24} \right) x^4 + o(x^4) \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

故当 $\alpha \neq -6$ 时, 原式为 2 阶无穷小; 当 $\alpha = -6$ 时, 原式为 4 阶无穷小。

□

例 4.5.9 (刘/闫/章·习题 4.4.5 节选)

证明下列不等式:

(1) $\frac{1-x}{1+x} \leq e^{-2x}, \quad 0 \leq x \leq 1.$

(2) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}, \quad x > 1.$

(3) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x, \quad x > 0.$

(4) $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1, \quad x \in [0, 1] \text{ 且 } p > 1.$

证明 (1) 考虑函数 $f(x) := (1+x)e^{-2x} + x - 1$, 则有

$$f'(x) = 1 - e^{-2x}(1+2x), \quad f''(x) = 4xe^{-2x} \geq 0 \quad (4.5.16)$$

故 f' 在 $[0, 1]$ 上单调不减, 从而 $f'(x) \geq f'(0) = 0$; 因此 f 在 $[0, 1]$ 上单调不减, 从而 $f(x) \geq f(0) = 0$, 原不等式成立。

(2) 原不等式等价于

$$2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow (1 + 2\sqrt{x})(1 - \sqrt{x})^2 > 0 \quad (4.5.17)$$

这是显然成立的。

(3) 当 $x \geq \pi$ 时, 显然有

$$x - \frac{x^3}{6} \leq x - \frac{\pi^2}{6}x \leq \pi - \frac{\pi^3}{6} < \frac{7}{2} - \frac{3^3}{6} \leq \sin x \leq 1 < x \quad (4.5.18)$$

故设 $x \in (0, \pi)$ 。考虑函数 $f(x) = x - \sin x$, 则 $f'(x) = 1 - \cos x > 0$, 故 f 在 $(0, \pi)$ 上严格增, 从而 $f(x) > f(0) = 0$ 。考虑函数 $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$, 则

$$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > \cos x - 1 + 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0, \quad x \in (0, \pi) \quad (4.5.19)$$

故 g 在 $(0, \pi)$ 上严格增, 从而 $g(x) > g(0) = 0$ 。综上, $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ 。

(4) 考虑函数 $f(x) := x^p + (1-x)^p$, 则有

$$f'(x) = p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}] \quad (4.5.20)$$

当 $p > 1$ 时, f' 严格增且 $f'(\frac{1}{2}) = 0$, 故 f 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上严格减、在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上严格增, 从而 $f(x) \geq f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{p-1}}$, 且 $f(x) \leq \max\{f(0), f(1)\} = 1$, 原不等式成立。□

第5次习题课 泰勒公式应用、函数凹凸性、 曲线的渐近线

2023年11月20日, 2024年11月7日, 2025年11月12日。本节对应微积分A(1)第7次习题课的内容。

5.1 知识点复习

5.1.1 函数的凹凸性

重要概念回顾

- (1) 凸集、凸函数 (下凸函数)、严格凸函数 (严格下凸函数); 凹函数 (上凸函数)、严格凹函数 (严格上凸函数)。
- (2) 拐点: 称 $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的一个拐点, 若 f 在 x_0 处连续, 且 f 在 x_0 两侧有相反的凹凸性。

重要定理回顾

- (1) f 在区间 I 上是凸函数, 当且仅当 $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$,

$$x_1 < x_2 < x_3 \implies \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (5.1.1)$$

- (2) f 在区间 I 上是严格凸函数, 当且仅当 $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$,

$$x_1 < x_2 < x_3 \implies \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (5.1.2)$$

- (3) 设 f 在开区间 I 上为凸函数, 则 $\forall x \in I$, $f'_+(x), f'_-(x)$ 都存在, 从而 f 连续, 且 f'_+, f'_- 单调不减。
- (4) 若 f 在区间 I 上可微, 且 f' 单调不减 (严格增), 则 f 在区间 I 上是凸函数 (严格凸函数)。
- (5) 设 f 在区间 I 上二阶可微, 则

- f 在区间 I 上是凸函数当且仅当 $f''(x) \geq 0$ 。
- 若 $f'' > 0$, 则 f 在区间 I 上是严格凸函数。

(6) 设 f 在区间 I 上是凸函数, 则 $\forall x_1, \dots, x_n \in I, \forall t_1, \dots, t_n \geq 0$,

$$t_1 + \dots + t_n = 1 \implies f(t_1x_1 + \dots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \dots + t_nf(x_n) \quad (5.1.3)$$

若 f 严格凸, 则上述不等式中的等号成立当且仅当 $\exists x_0 \in I$ 使得 $\{x_k \mid t_k > 0, 1 \leq k \leq n\} = \{x_0\}$ 。

- (7) 设 f 在区间 I 上是可微的凸函数, $x_0 \in I$ 满足 $f'(x_0) = 0$, 则 x_0 是 f 在 I 上的最小值点。
- (8) 若 f 在区间 I 上可微且严格凸, 则 f 在 I 上要么严格单调, 要么有唯一的临界点, 这个临界点是 f 在 I 上的最小值点。
- (9) 若 f 是有界闭区间 $[a, b]$ 上的凸函数, 则

$$f(x) \leq \max\{f(a), f(b)\}, \quad \forall x \in [a, b] \quad (5.1.4)$$

如果 f 严格凸, 则 f 在 $[a, b]$ 上的最大值仅当在端点处取得。

应用

- (1) 幂函数、指数函数、对数函数的凹凸性。
- (2) **Young 不等式:** 设 $p_1, \dots, p_n > 0$ 满足 $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$, 则 $\forall x_1, \dots, x_n > 0$, 有

$$\frac{x_1^{p_1}}{p_1} + \frac{x_2^{p_2}}{p_2} + \dots + \frac{x_n^{p_n}}{p_n} \geq x_1x_2 \cdots x_n \quad (5.1.5)$$

其中等号成立当且仅当 $x_1^{p_1} = x_2^{p_2} = \dots = x_n^{p_n}$ 。

注 数学中凹凸性的定义与函数图像是否“凹凸”不同, 拐点的含义与日常生活中常说的“拐点”意义不同。

5.2 雨课堂作业

例 5.2.1 (作业第 1 题)

设函数 f 在区间 (a, b) 内为凸函数。

(1) 证明:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0), \quad \forall x > x_0, \forall x_0 \in (a, b) \quad (5.2.1)$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0), \quad \forall x < x_0, \forall x_0 \in (a, b) \quad (5.2.2)$$

(2) 若 $b = +\infty$ 且 $y = kx + m$ 是 $y = f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的渐近线, 证明:

$$f(x) \geq kx + m, \quad \forall x \in (a, +\infty) \quad (5.2.3)$$

证明 (1) $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $x_1 < x_2$, 取 $x_1 < x < x_2$, 由凸函数的等价定义可得

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (5.2.4)$$

分别令 $x \rightarrow x_1^+$ (左不等号) 和 $x \rightarrow x_2^-$ (右不等号) 可得

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2) \implies \begin{cases} f(x_2) \geq f(x_1) + f'_+(x_1)(x_2 - x_1) \\ f(x_1) \geq f(x_2) + f'_-(x_2)(x_1 - x_2) \end{cases} \quad (5.2.5)$$

(2) 由渐近线的定义可知

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad m = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] \quad (5.2.6)$$

$\forall x_0 \in (a, +\infty)$, 注意到

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{x(x - x_0)} \\ &= k + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x_0}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0)}{x - x_0} = k \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

取 $x_1 < x < x_2$, 由 (1) 和凸函数的性质可得

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (5.2.8)$$

先令 $x_2 \rightarrow +\infty$ 可得

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq k, \quad \forall x_1 \in (a, x) \quad (5.2.9)$$

再令 $x \rightarrow +\infty$ 可得

$$k \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f'_-(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f'_+(x) \leq k \implies k = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'_-(x) \quad (5.2.10)$$

又注意到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x f'_-(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] + \lim_{x \rightarrow +\infty} x [k - f'_-(x)] = m + \lim_{x \rightarrow +\infty} x [k - f'_-(x)] \quad (5.2.11)$$

取 $x_1 \in (a, x)$, 利用 $f'_-(x)$ 满足的不等式可得

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} x [k - f'_-(x)] &\leq \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[k - \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x - x_1} \cdot \left\{ f(x_1) - kx_1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] \right\} = f(x_1) - kx_1 - m \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

再令 $x_1 \rightarrow +\infty$ 可得

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} x [k - f'_-(x)] \leq 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x f'_-(x)] = m \quad (5.2.13)$$

令 (1) 中第二个式子的 $x_0 \rightarrow +\infty$ 可得

$$f(x) \geq x \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} f'_-(x_0) + \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} [f(x_0) - x_0 f'_-(x_0)] = kx + m \quad (5.2.14)$$

□

例 5.2.2 (作业第 2 题)

设 I 为非空开区间, 证明: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是凸函数当且仅当对任意 $c \in I$, 都存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(x) \geq f(c) + \lambda(x - c), \quad \forall x \in I. \quad (5.2.15)$$

证明 \implies : 若 f 为凸函数, 由上题可得

$$\begin{cases} f(x) \geq f(c) + f'_+(c)(x - c), & \forall x > c \\ f(x) \geq f(c) + f'_-(c)(x - c), & \forall x < c \end{cases} \quad (5.2.16)$$

由凸函数的性质可得 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$, 故取 $\lambda \in [f'_-(c), f'_+(c)]$ 即可。

\Leftarrow : $\forall x_1, x_2 \in I$ 且 $x_1 < x_2$, 设 $t \in (0, 1)$, 则 $x = tx_1 + (1-t)x_2 \in (x_1, x_2)$, 由题设不等式可得

$$f(x_1) \geq f(x) + \lambda(x_1 - x), \quad f(x_2) \geq f(x) + \lambda(x_2 - x) \quad (5.2.17)$$

因此

$$tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq f(x) + \lambda[t(x_1 - x) + (1-t)(x_2 - x)] = f(x) \quad (5.2.18)$$

即 f 为凸函数。 □

例 5.2.3 (作业第 3 题)

不定项选择题: 设 f, g 都是区间 (a, b) 内的严格凸函数, 则以下结论中必然正确的是_____。

- (A) $f + g$ 也是区间 (a, b) 内的严格凸函数;
- (B) $f - g$ 也是区间 (a, b) 内的严格凸函数;
- (C) $f \cdot g$ 也是区间 (a, b) 内的严格凸函数;
- (D) 若 $g(x) > 0$ ($\forall x \in (a, b)$), 则 $f \cdot g$ 也是区间 (a, b) 内的严格凸函数;
- (E) $-f$ 也是区间 (a, b) 内的严格凸函数;
- (F) 若 $g(x) > 0$ ($\forall x \in (a, b)$), 则 $\frac{1}{g}$ 也是区间 (a, b) 内的严格凸函数;

- (G) 若 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \geq 0$ 、 $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) \geq 0$ ，且 f, g 在区间 (a, b) 内单调减，则 $f \cdot g$ 也是区间 (a, b) 内的严格减的严格凸函数；
- (H) 如果 h 是 \mathbb{R} 上的严格凸函数，则 $h \circ f$ 是区间 (a, b) 内的严格凸函数；
- (I) 如果 h 是 \mathbb{R} 上的严格增的严格凸函数，则 $h \circ f$ 是区间 (a, b) 内的严格凸函数。

解 AGI。

- (A) $f(tx_1 + (1-t)x_2) + g(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2) + tg(x_1) + (1-t)g(x_2) < t[f(x_1) + g(x_1)] + (1-t)[f(x_2) + g(x_2)]$ 。
- (B) 取 $f = g$ ，则 $f - g \equiv 0$ ，不严格凸。
- (C) 取 $(a, b) = (0, +\infty)$ 、 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 、 $g(x) = x^2$ ，则 $f \cdot g \equiv 1$ ，不严格凸。
- (D) 同上。
- (E) $-f$ 是区间 (a, b) 内的严格凹函数，不是严格凸函数。
- (F) 取 $(a, b) = (0, +\infty)$ 、 $g(x) = \frac{1}{x}$ ，则 $\frac{1}{g(x)} = x$ ，不严格凸。
- (G) 严格凸的单调函数一定严格单调，故 $f, g > 0$ ，从而 $f \cdot g$ 严格减，并且

$$\begin{aligned}
 & f(tx_1 + (1-t)x_2) \cdot g(tx_1 + (1-t)x_2) < [tf(x_1) + (1-t)f(x_2)] \cdot [tg(x_1) + (1-t)g(x_2)] \\
 & = t^2 f(x_1)g(x_1) + (1-t)^2 f(x_2)g(x_2) + t(1-t) \cdot [f(x_1)g(x_2) + f(x_2)g(x_1)] \\
 & = tf(x_1)g(x_1) + (1-t)f(x_2)g(x_2) - t(1-t) \cdot [f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2) - f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_1)] \\
 & = tf(x_1)g(x_1) + (1-t)f(x_2)g(x_2) - t(1-t) \cdot [f(x_2) - f(x_1)] \cdot [g(x_2) - g(x_1)] \\
 & < tf(x_1)g(x_1) + (1-t)f(x_2)g(x_2)
 \end{aligned} \tag{5.2.19}$$

- (H) 取 $(a, b) = \mathbb{R}$ 、 $h(x) = x^2$ 、 $f(x) = x^2 - 1$ ，则 $h \circ f(x) = (x^2 - 1)^2$ ，不严格凸。
- (I) $h[f(tx_1 + (1-t)x_2)] < h[tf(x_1) + (1-t)f(x_2)] < th[f(x_1)] + (1-t)h[f(x_2)]$ 。

□

例 5.2.4 (作业第 4 题)

不定项选择题：设 f 在区间 $(0, +\infty)$ 内严格凸，则以下结论中必然成立的是_____。

- (A) 如果 f 有下界，则 f 有最小值；
- (B) 如果 f 有最小值，则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ；

(C) 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A < +\infty$, 则 f 严格减;

(D) 如果 f 没有下界, 则 f 严格减且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ 。

解 BCD。

(A) $f(x) = \frac{1}{x}$ 严格凸且有下界 0, 但无最小值。

(B) 设最小值点为 x_0 , 取 $x_1 > x_0$, 则 $f(x_1) \geq f(x_0)$ 。若 $f(x_1) = f(x_0)$, 则连续函数 f 在区间 $[x_0, x_1]$ 必有最小值 $f(x_0)$, 与 f 严格凸矛盾, 故 $f(x_1) > f(x_0)$ 。由凸函数的性质可得 $\forall x > x_1$, 都有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} > 0 \implies f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1) \quad (5.2.20)$$

令 $x \rightarrow +\infty$ 可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 。

(C) 假设 f 不严格减, 即 $\exists x_0, x_1$ 使得 $x_0 < x_1$ 且 $f(x_0) \leq f(x_1)$ 。若 $f(x_0) = f(x_1)$, 则连续函数 f 在区间 $[x_0, x_1]$ 必有最小值 $f(x_2)$, 且 $x_2 \neq x_0$, 否则与 f 严格凸矛盾; 此时取 x_2 为新的 x_0 , 则有 $f(x_0) < f(x_1)$ 。同 (B) 可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 与题设矛盾, 故 f 严格减。

(D) 假设 f 不严格减, 同 (C) 可得 $\exists x_0, x_1$ 使得 $x_0 < x_1$ 且 $f(x_0) < f(x_1)$ 。连续函数 f 在区间 $[x_0, x_1]$ 上有最小值 m , 此外同 (B)(C) 可得

$$\begin{aligned} f(x) &> f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1) > f(x_1), & \forall x > x_1 \\ f(x) &\geq m, & \forall x_0 \leq x \leq x_1 \\ f(x) &> f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) > f(x_0) - x_0 \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, & \forall 0 < x < x_0 \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

即 f 有下界, 与题设矛盾, 故 f 严格减; 且由于 f 无下界, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ 。

□

例 5.2.5 (作业第 5 题)

(1) 证明: 对任意 $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ 都有

$$\frac{\tan b}{\tan a} > \frac{b}{a} \quad (5.2.22)$$

(2) 设 f 在区间 $[0, b)$ 上可导, $f(0) = 0$, f' 严格增。证明: $\frac{f(x)}{x}$ 在区间 $(0, b)$ 上严格增。

你有多少种办法来证明以上两个结论?

证明 (2) f' 严格增等价于 f 为严格凸函数。取 $0 < x_1 < x_2$, 由凸函数的等价定义可得

$$\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} < \frac{f(x_2) - f(0)}{x_2 - 0} \implies \frac{f(x_1)}{x_1} < \frac{f(x_2)}{x_2} \quad (5.2.23)$$

由此可得 $\frac{f(x)}{x}$ 在区间 $(0, b)$ 上严格增。

(1) 取 $f(x) = \tan x$, 则 $f(0) = 0$, 且 $f'(x) = \sec^2 x$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上严格增。由 (2) 可得 $\frac{\tan x}{x}$ 亦在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上严格增, 因此

$$\frac{\tan b}{b} > \frac{\tan a}{a} \implies \frac{\tan b}{\tan a} > \frac{b}{a} \quad (5.2.24)$$

□

例 5.2.6 (作业第 6 题)

设 $f(x) = xe^x$ 。

- (1) 讨论 f 的单调性和极值与最值;
- (2) 讨论 $y = f(x)$ 的渐近线;
- (3) 讨论 f 凹凸性;
- (4) 证明 f 在区间 $(-1, +\infty)$ 上有反函数 g , 并求 g 的定义域;
- (5) 讨论 g 的单调性、凹凸性、渐近线;
- (6) 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{\ln x} = 1 \quad (5.2.25)$$

解 (1) f 在 $(-\infty, -1)$ 上严格减, 在 $(-1, +\infty)$ 上严格增, 且 $f(-1) = -\frac{1}{e}$ 为 f 的最小值。

(2) $y = 0$ 为 f 在 $x \rightarrow -\infty$ 处的水平渐近线。

(3) f 在 $(-\infty, -2)$ 上严格凹, 在 $(-2, +\infty)$ 上严格凸。

(4) 由 (1) 可知 f 在 $(-1, +\infty)$ 上严格增, 故有反函数 g , 且 g 的定义域为 $(-\frac{1}{e}, +\infty)$ 、值域为 $(-1, +\infty)$ 。

(5) g 亦在定义域内严格增, 故 $g(x) > -1$ 在定义域内恒成立。由于 g 无上界, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ 。由反函数求导公式可得

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{f'[g(x)]} = \frac{1}{(1+g(x))e^{g(x)}} = \frac{g(x)}{x(1+g(x))} \\ g''(x) &= \frac{g'(x) \cdot x(1+g(x)) - g(x) \cdot [1+g(x) + xg'(x)]}{x^2(1+g(x))^2} = -\frac{g(x)^2[2+g(x)]}{x^2(1+g(x))^3} < 0 \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

因此 g 在定义域内严格凹。由于 $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{e}^+} g(x) = -1 \neq \infty$, 故 g 没有竖直渐近线。计算可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x=g^{-1}(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{ye^y} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 0 \cdot x] = +\infty \quad (5.2.27)$$

故 g 在 $x \rightarrow +\infty$ 处不存在渐近线。

(6) 由 L'Hôpital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{1 + g(x)} = 1 \quad (5.2.28)$$

□

例 5.2.7 (作业第 7 题)

设 $q(x) < 0$, 证明: 如果微分方程边值问题

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), & a < x < b \\ y(a) = A, & y(b) = B \end{cases} \quad (5.2.29)$$

有解, 则必有唯一解。

证明 设 y_1, y_2 为该微分方程边值问题的两个解, 令 $y = y_1 - y_2$, 则 y 满足齐次边值问题

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, & a < x < b \\ y(a) = 0, & y(b) = 0 \end{cases} \quad (5.2.30)$$

假设 $y \neq 0$, 则 y 在 $[a, b]$ 内有最大值和最小值, 且至少有一个不为零。不妨设 y 的最大值 $y(\xi) > 0$, 其中 $\xi \in (a, b)$, 否则可以考虑 $-y$ 。由 Fermat 引理可得 $y'(\xi) = 0, y''(\xi) \leq 0$, 因此

$$0 = y''(\xi) + p(\xi)y'(\xi) + q(\xi)y(\xi) = y''(\xi) + q(\xi)y(\xi) \leq q(\xi)y(\xi) < 0 \quad (5.2.31)$$

矛盾, 故 $y \equiv 0$, 即边值问题有唯一解。 □

例 5.2.8 (作业第 8 题)

讨论 $(1+x)^\alpha$ 与 $1+\alpha x$ 的大小关系。

解 限定 $x > -1$ 。当 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = 1$ 时,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$$

恒成立。下设 $\alpha \neq 0, 1$, 记 $f(x) = (1+x)^\alpha$, 则 $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ 。

1° 若 $0 < \alpha < 1$, 则 $f''(x) < 0$, f 在 $(-1, +\infty)$ 上严格凹。由凹函数的性质可得

$$(1+x)^\alpha < f(0) + f'(0)x = 1 + \alpha x, \quad \forall x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\} \quad (5.2.32)$$

2° 若 $\alpha > 1$ 或 $\alpha < 0$, 则 $f''(x) > 0$, f 在 $(-1, +\infty)$ 上严格凸。由凸函数的性质可得

$$(1+x)^\alpha > f(0) + f'(0)x = 1 + \alpha x, \quad \forall x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\} \quad (5.2.33)$$

□

例 5.2.9 (作业第 9 题)

设 $0 < a < b$, 讨论

$$\sqrt{ab}, \quad \frac{b-a}{\ln b - \ln a}, \quad \frac{a+b}{2} \quad (5.2.34)$$

的大小关系。

证明 令 $t = \frac{a}{b} \in (0, 1)$, 则题目等价于讨论 \sqrt{t} , $\frac{t-1}{\ln t}$, $\frac{t+1}{2}$ 的大小关系。令 $f(t) := t - 1 - \sqrt{t} \ln t$, $g(t) := (t+1) \ln t - 2(t-1)$, 求导可得

$$f'(t) = \frac{\sqrt{t} - 1 - \ln \sqrt{t}}{\sqrt{t}} > 0, \quad g'(t) = \frac{1}{t} - 1 - \ln \frac{1}{t} > 0 \quad (5.2.35)$$

故有

$$f(t) < f(1) = 0, \quad g(t) < g(1) = 0, \quad \forall t \in (0, 1) \quad (5.2.36)$$

因此

$$\sqrt{t} > \frac{t-1}{\ln t} > \frac{t+1}{2}, \quad \forall t \in (0, 1) \quad (5.2.37)$$

□

注 我们尝试将对数平均数和指数平均数比较, 即寻找最好的 α , 使得 $\frac{t-1}{\ln t}$, $\left(\frac{1+t^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ 相差最小。考虑这两个函数在 $t=1$ 处的 Taylor 展开, 可得

$$\begin{aligned} \frac{t-1}{\ln t} &= 1 + \frac{1}{2}(t-1) - \frac{1}{12}(t-1)^2 + o[(t-1)^2] \\ \left(\frac{1+t^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} &= 1 + \frac{1}{2}(t-1) + \frac{\alpha-1}{8}(t-1)^2 + o[(t-1)^2] \end{aligned} \quad (5.2.38)$$

令 $\frac{\alpha-1}{8} = -\frac{1}{12}$, 可解得 $\alpha = \frac{1}{3}$, 即对数平均数最接近 $\frac{1}{3}$ 次指数平均数。

我们再考虑以下问题: 设 α, β 使得以下不等式恒成立:

$$\left(\frac{1+t^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \frac{t-1}{\ln t} < \left(\frac{1+t^\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad \forall t \in (0, 1) \quad (5.2.39)$$

本题结论告诉我们 $\sup \alpha \geq 0$, $\inf \beta \leq 1$ 。我们尝试证明: $\sup \alpha = 0$, $\inf \beta = \frac{1}{3}$ 。令 $f_\alpha(x) := \left(\frac{1+t^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{t-1}{\ln t}$, 则待证结论的充分条件为:

- $\forall \alpha \in (0, \frac{1}{3})$, $\exists t_0 \in (0, 1)$ 使得 $f_\alpha(t_0) < 0$ 。
- $f_{1/3}(t) > 0$ 在 $t \in (0, 1)$ 上恒成立。

当 $\alpha \in (0, \frac{1}{3})$ 时, 求导可得

$$f''_{\alpha}(t) = \frac{1}{t^2} \left[\frac{2-2t}{\ln^3 t} + \frac{1+t}{\ln^2 t} - \frac{(1-\alpha)t^{\alpha}}{(1+t^{\alpha})^2} \left(\frac{1+t^{\alpha}}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \rightarrow \frac{3\alpha-1}{12} < 0, \quad t \rightarrow 1^- \quad (5.2.40)$$

故 $\exists t_0 \in (0, 1)$ 使得 $f''(t_0)$ 在 $(t_0, 1)$ 恒负。由带 Lagrange 余项的 Taylor 展开可得

$$f_{\alpha}(t_0) = f_{\alpha}(1) + f'_{\alpha}(1)(t_0 - 1) + \frac{f''_{\alpha}(\xi)}{2}(t_0 - 1)^2 = \frac{1}{2}f''_{\alpha}(\xi)(t_0 - 1)^2 < 0, \quad \xi \in (t_0, 1) \quad (5.2.41)$$

故命题成立。当 $\alpha = \frac{1}{3}$ 时, 令

$$g(t) := \left(\frac{1+t^{1/3}}{2} \right)^3 \ln t - (t-1), \quad \forall t \in (0, 1) \quad (5.2.42)$$

$f_{1/3}(t) > 0$ 等价于 $g(t) < 0$, 等价于证明

$$h(t) := g(t^3) = \frac{3}{8}(1+t)^3 \ln t - (t^3 - 1) > 0, \quad \forall t \in (0, 1) \quad (5.2.43)$$

求导可得

$$h'''(t) = \frac{9}{4} \left(\frac{2}{t^3} - \frac{3}{t^2} + \frac{6}{t} - 5 - \ln \frac{1}{t} \right) > \frac{9}{4} \left(\frac{2}{t^3} - \frac{3}{t^2} + \frac{5}{t} - 4 \right) = \frac{9}{4t^3}(1-t)(4t^2 - t + 2) > 0 \quad (5.2.44)$$

因此 $h''(x) < h''(1) = 0$ 、 $h'(x) > h'(1) = 0$ 、 $h(x) < h(1) = 0$ 在 $t \in (0, 1)$ 上恒成立, 命题得证。

例 5.2.10 (作业第 10 题)

如图 5.2.1, 漂在河面上一根木桩能够通过这个直角转弯, 请问木桩长度最长是多少?

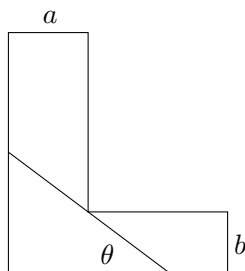


图 5.2.1: 作业第 10 题示意图

解 当木桩与河道水平线的夹角为 θ 时, 木桩的长度 L 需满足

$$L \leq \frac{a}{\cos \theta} + \frac{b}{\sin \theta} =: f(\theta), \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.2.45)$$

则 L 需满足 $L \leq \inf_{\theta \in (0, \frac{\pi}{2})} f(\theta)$ 。求导可得

$$f'(\theta) = a \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - b \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{a \sin^3 \theta - b \cos^3 \theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} = \frac{a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \left(\tan^3 \theta - \frac{b}{a} \right) \quad (5.2.46)$$

记 $\theta_0 := \arctan \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, 则 f 在 $(0, \theta_0)$ 上严格减, 在 $(\theta_0, \frac{\pi}{2})$ 上严格增, 因此

$$L \geq f(\theta_0) = a\sqrt{1 + \tan^2 \theta_0} \left(1 + \frac{b}{a \tan \theta_0}\right) = a(1 + \tan^2 \theta_0)^{3/2} = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2} \quad (5.2.47)$$

□

5.3 补充习题

5.3.1 微分中值定理

菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第一卷中有一小节插值法讲了这个内容, 这本来是数值分析里讲插值逼近误差分析的内容, 但被讲数学分析的人用来构造各种吓人的中值问题。

—WXF

命题 5.3.1 (Birkhoff 插值)

设 n 次函数 g 由以下 $n+1$ 个条件确定:

$$g^{(k_i)}(x_i) = f^{(k_i)}(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (5.3.1)$$

其满足 (记 $\mathbb{N}_n = \{0, 1, \dots, n\}$):

- 插值条件互不相同: $\forall i, j \in \mathbb{N}_n$ 且 $i \neq j$, 都有 $(k_i, x_i) \neq (k_j, x_j)$;
- Pólya 正则条件 (后 k 阶导的插值条件不超过 $n+1-k$ 个): $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $\text{card}\{i \in \mathbb{N}_n \mid k_i \geq k\} \leq n+1-k$.

则这样的 g (以及其 k 阶导数) 由以下行列式唯一确定:

$$\begin{vmatrix} g^{(k)}(x) & (1)^{(k)} & (x)^{(k)} & \cdots & (x^n)^{(k)} \\ f^{(k_0)}(x_0) & (1)^{(k_0)}|_{x=x_0} & (x)^{(k_0)}|_{x=x_0} & \cdots & (x^n)^{(k_0)}|_{x=x_0} \\ f^{(k_1)}(x_1) & (1)^{(k_1)}|_{x=x_1} & (x)^{(k_1)}|_{x=x_1} & \cdots & (x^n)^{(k_1)}|_{x=x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(k_n)}(x_n) & (1)^{(k_n)}|_{x=x_n} & (x)^{(k_n)}|_{x=x_n} & \cdots & (x^n)^{(k_n)}|_{x=x_n} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.3.2)$$

命题的证明是不言自明的, 附加条件保证了 $g^{(k)}(x)$ 对应的余子式可逆。利用这个命题, 我们可以构造出各种各样的中值定理。

例 5.3.2 (刘/闫/章· 习题 4.1.13)

设函数 f, g, h 在 $[a, b]$ 上连续、在 (a, b) 内可导, 证明: $\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0 \quad (5.3.3)$$

证明 令

$$F(x) := \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix} \implies F(a) = F(b) = 0 \quad (5.3.4)$$

由 Rolle 定理可知 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$F'(\xi) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0 \quad (5.3.5)$$

□

例 5.3.3 (刘/闫/章· 习题 4.1.14)

设 f 在 $[a, b]$ 上一阶可导, 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$ 、 $f'_+(a)f'_-(b) > 0$, 证明:

- (1) $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) + 2f'(\xi) + f(\xi) = 0$.
- (2) $\exists \theta \in (a, b)$, 使得 $f''(\theta) - 2f'(\theta) + f(\theta) = 0$.
- (3) $\exists \eta \in (a, b)$, 使得 $f''(\eta) = f'(\eta)$.
- (4) $\exists \zeta \in (a, b)$, 使得 $f''(\zeta) = f(\zeta)$.

我们先证明如下引理:

引理 5.3.4

设 f 在 $[a, b]$ 上一阶可导, 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$ 、 $f'_+(a)f'_-(b) > 0$, 则 $\exists \xi_1, \xi_2, \xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f''(\xi) = 0$.

引理的证明 不妨设 $f'_+(a) > 0$, 否则可以考虑 $-f$. 令 $\varepsilon = \frac{1}{2}f'_+(a)$, 则 $\exists \delta \in (0, \frac{b-a}{2})$ 使得

$$0 < x - a < \delta \implies -\varepsilon < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'_+(a) < \varepsilon \implies f(x) > \frac{1}{2}f'_+(a)(x - a) > 0 \quad (5.3.6)$$

即 $\exists x_1 \in (a, a + \delta) \subseteq (a, \frac{a+b}{2})$ 使得 $f(x_1) = 0$ 。同理, $\exists x_2 \in (b - \delta, b) \subseteq (\frac{a+b}{2}, b)$ 使得 $f(x_2) = 0$ 。由介值定理可知 $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$ 使得 $f(x_0) = 0$ 。

反复应用 Rolle 定理可得: $\exists \xi_1 \in (a, x_0)$ 使得 $f'(\xi_1) = 0$, $\exists \xi_2 \in (x_0, b)$ 使得 $f'(\xi_2) = 0$, $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (a, b)$ 使得 $f''(\xi) = 0$ 。□

证明 (1) 令 $F(x) = e^x f(x)$, 则 $F(a) = F(b) = 0$, 且

$$F'_+(a)F'_-(b) = e^{a+b} f'_+(a)f'_-(b) > 0 \quad (5.3.7)$$

由引理可知 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $F''(\xi) = 0$, 即

$$f''(\xi) + 2f'(\xi) + f(\xi) = 0 \quad (5.3.8)$$

(2) 令 $G(x) = e^{-x} f(x)$, 则 $G(a) = G(b) = 0$, 且

$$G'_+(a)G'_-(b) = e^{-a-b} f'_+(a)f'_-(b) > 0 \quad (5.3.9)$$

由引理可知 $\exists \theta \in (a, b)$ 使得 $G''(\theta) = 0$, 即

$$f''(\theta) - 2f'(\theta) + f(\theta) = 0 \quad (5.3.10)$$

(3) 令 $H(x) = e^{-x} f'(x)$, 由引理可知 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$, 亦即 $H(\xi_1) = H(\xi_2) = 0$ 。由 Rolle 定理可知 $\exists \eta \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (a, b)$ 使得 $H'(\eta) = 0$, 即

$$f''(\eta) = f'(\eta) \quad (5.3.11)$$

(4) 令 $I(x) = e^{-x}(f(x) + f'(x))$, 由引理可知 $\exists \zeta_1, \zeta_2 \in (a, b)$ 使得 $F'(\zeta_1) = F'(\zeta_2) = 0$, 亦即 $I(\zeta_1) = I(\zeta_2) = 0$ 。由 Rolle 定理可知 $\exists \zeta \in (\zeta_1, \zeta_2) \subseteq (a, b)$ 使得 $I'(\zeta) = 0$, 即

$$f''(\zeta) = f(\zeta) \quad (5.3.12)$$

□

例 5.3.5 (刘/闫/章·习题 4.3.9)

设函数 $f \in \mathcal{C}^3[0, 1]$, 且 $f(0) = f'(\frac{1}{2}) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$ 。证明: $\exists \xi \in (0, 1)$, 使得 $f'''(\xi) = 12$ 。

证明 记 $f_0 = f(\frac{1}{2})$, 构造三次函数 $g(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ 满足

$$g(0) = g'(\frac{1}{2}) = 0, \quad g(\frac{1}{2}) = f_0, \quad g(1) = \frac{1}{2} \implies g(x) = 2x^3 - 2(1 + 2f_0)x^2 + \frac{1 + 8f_0}{2}x \quad (5.3.13)$$

令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则 $F(0) = F(\frac{1}{2}) = F(1) = F'(1) = 0$ 。反复应用 Rolle 定理可得:

- $\exists \xi_1 \in (0, \frac{1}{2})$ 使得 $F'(\xi_1) = 0$, $\exists \xi_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$ 使得 $F'(\xi_2) = 0$ 。

- $\exists \eta_1 \in (\xi_1, \frac{1}{2})$ 使得 $F''(\eta_1) = 0$, $\exists \eta_2 \in (\frac{1}{2}, \xi_2)$ 使得 $F''(\eta_2) = 0$.
- $\exists \xi \in (\eta_1, \eta_2) \subseteq (a, b)$ 使得 $F'''(\xi) = 0$, 即 $f'''(\xi) = g'''(\xi) = 12$.

□

例 5.3.6 (刘/闫/章· 习题 4.3.11)

设 $h > 0$, 函数 $f \in \mathcal{C}^1[x_0 - h, x_0 + h]$. 证明: $\exists \theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = [f'(x_0 + \theta h) + f'(x_0 - \theta h)]h \quad (5.3.14)$$

证明 令 $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $F(x) = f(x_0 + xh) - f(x_0 - xh)$, 由 Lagrange 中值定理可得 $\exists \theta \in (0, 1)$ 使得

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = F(1) - F(0) = F'(\theta) = [f'(x_0 + \theta h) + f'(x_0 - \theta h)]h \quad (5.3.15)$$

□

例 5.3.7 (刘/闫/章· 习题 4.3.12)

设函数 $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$, 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明: $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)| \quad (5.3.16)$$

证明 由带 Lagrange 余项的 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(a) - f'(a)\frac{b-a}{2} + \frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{8}(b-a)^2 \\ &= f(b) + f'(b)\frac{b-a}{2} + \frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{8}(b-a)^2 \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

即

$$f(b) - f(a) = \frac{(b-a)^2}{8} [f''(\xi_1) - f''(\xi_2)] \quad (5.3.18)$$

令 $\xi \in \{\xi_1, \xi_2\}$ 满足 $|f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$, 则

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} [|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|] \leq \frac{(b-a)^2}{4} |f''(\xi)| \quad (5.3.19)$$

得证.

□

例 5.3.8 (楼红卫·例 6.5.4)

设函数 $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$, 在 (a, b) 内三阶可导。证明: $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)(f'(a) + f'(b)) - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi) \quad (5.3.20)$$

证明 构造三次函数 $g(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 满足

$$g(a) = f(a), \quad g(b) = f(b), \quad g'(a) = f'(a), \quad g'(b) = f'(b) \quad (5.3.21)$$

这样的 g 由以下公式确定:

$$\begin{vmatrix} g(x) & 1 & x & x^2 & x^3 \\ f(a) & 1 & a & a^2 & a^3 \\ f(b) & 1 & b & b^2 & b^3 \\ f'(a) & 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ f'(b) & 0 & 1 & 2b & 3b^2 \end{vmatrix} = 0 \implies \begin{vmatrix} g'''(x) & 0 & 0 & 0 & 6 \\ f(a) & 1 & a & a^2 & a^3 \\ f(b) & 1 & b & b^2 & b^3 \\ f'(a) & 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ f'(b) & 0 & 1 & 2b & 3b^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.3.22)$$

解得

$$g'''(x) = -\frac{12}{(b-a)^3}[f(b) - f(a)] + \frac{6}{(b-a)^2}[f'(a) + f'(b)] \quad (5.3.23)$$

令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则 $F(a) = F(b) = F'(a) = F'(b) = 0$ 。反复应用 Rolle 定理可得:

- $\exists \eta \in (a, b)$ 使得 $F'(\eta) = 0$ 。
- $\exists \xi_1 \in (a, \eta)$ 使得 $F''(\xi_1) = 0$, $\exists \xi_2 \in (\eta, b)$ 使得 $F''(\xi_2) = 0$ 。
- $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (a, b)$ 使得 $F'''(\xi) = 0$, 即

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)(f'(a) + f'(b)) - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi) \quad (5.3.24)$$

□

5.3.2 Taylor 展开式 (二)

例 5.3.9

阿基米德提出用圆内接正多边形的周长逼近圆的周长, 从而计算圆周率的近似值。荷兰的 Ludolph van Ceulen 用一生的时间计算了 2^{62} 边形, 得到圆周率的 35 位小数。由初等的平面几何知识可得: 半径为

1 的圆内接正 $3 \cdot 2^n$ 边形的边长 a_n 和周长 L_n 满足递推关系:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}} = a_n \sqrt{\frac{1}{2 + \sqrt{4 - a_n^2}}} \\ L_{n+1} &= 3 \cdot 2^{n+1} a_{n+1} = L_n \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{L_n}{3 \cdot 2^n}\right)^2}}} \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

然而, 这个公式收敛很慢. 试确定常数 λ , 使得数列 $\{(1 - \lambda)L_n + \lambda L_{n+1}\}$ 具有最快的收敛速度.

解 易见

$$\begin{aligned} L_n &= 3 \cdot 2^{n+1} \sin \frac{2\pi}{3 \cdot 2^{n+1}} = 3 \cdot 2^{n+1} \left[\frac{2\pi}{3 \cdot 2^{n+1}} - \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi}{3 \cdot 2^{n+1}} \right)^3 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{2^{5n}} \right) \right] \\ &= 2\pi - \frac{\pi^3}{27 \cdot 2^{2n}} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{2^{4n}} \right) \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

于是

$$(1 - \lambda)L_n + \lambda L_{n+1} = 2\pi - \frac{(4 - 3\lambda)\pi^3}{27 \cdot 2^{2n+2}} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{2^{4n}} \right) \quad (5.3.27)$$

取 $\lambda = \frac{4}{3}$ 可得

$$\tilde{L}_n = -\frac{1}{3}L_n + \frac{4}{3}L_{n+1} = 2\pi + \mathcal{O} \left(\frac{1}{2^{4n}} \right) \quad (5.3.28)$$

□

例 5.3.10

(1) 证明: $\forall x \in [-1, 1]$,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad (5.3.29)$$

(2) 利用 $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$, 求 π 的近似值.

证明 (1) 注意到

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}) \quad (5.3.30)$$

由 Taylor 展开式的唯一性可知 $\exists \xi \in (-1, 1)$ 使得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{\arctan^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \quad (5.3.31)$$

形式上有

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right) \quad (5.3.32)$$

求导可得

$$\arctan^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}} \right) \quad (5.3.33)$$

故有

$$\left| \frac{\arctan^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \right| \leq \frac{2}{2(n+1)} \max \left\{ \frac{1}{|x-i|^{n+1}}, \frac{1}{|x+i|^{n+1}} \right\} \leq \frac{1}{n+1} \quad (5.3.34)$$

因此

$$\left| \frac{\arctan^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{2n+2} \leq \frac{1}{2n+2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \quad \xi \in (-1, 1) \quad (5.3.35)$$

即

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad (5.3.36)$$

(2) 由题可得

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n-1}} \right) \quad (5.3.37)$$

其前 22 项的和就能得到 π 的近似值为 3.141592653589790, 它的前 14 位小数是精确的。□

5.3.3 函数的凹凸性

定理 5.3.11

设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 则凸函数的以下 5 个定义等价:

(1) $\forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in [0, 1]$, 有

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad (5.3.38)$$

(2) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$, 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (5.3.39)$$

(3) 设 f 在 I 上可微, 则 f' 在 I 上单调不减。

(4) 设 f 在 I 上可微, 则 $\forall x_1, x_2 \in I$, 有

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad (5.3.40)$$

(5) 设 f 在 I 上二阶可微, 则 $\forall x \in I$, 有 $f''(x) \geq 0$ 。

证明 (1) \iff (2): 当 $t = 0, 1$ 时, 不等式显然成立. 当 $t \in (0, 1)$ 时, 令 $x_2 = tx_1 + (1-t)x_3$, 则

$$f(tx_1 + (1-t)x_3) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_3) \iff \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (5.3.41)$$

(2) \implies (3): $\forall x_1, x_3 \in I$ 且 $x_1 < x_3$, 分别令 $x_2 \rightarrow x_1^+$ 、 $x_2 \rightarrow x_3^-$, 由 (2) 可得

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1^+} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \lim_{x_2 \rightarrow x_3^-} \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(x_3) \quad (5.3.42)$$

(3) \implies (4): 由 Lagrange 中值定理可知 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geq f'(x_1) \implies f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad (5.3.43)$$

(4) \implies (2): 由 (4) 可得

$$\begin{cases} f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \\ f(x_3) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_3 - x_2) \end{cases} \implies \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2) \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (5.3.44)$$

再注意到

$$\begin{aligned} \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} &= \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \cdot \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \\ &\geq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \cdot \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} &\leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \cdot \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \end{aligned} \quad (5.3.45)$$

(3) \implies (5): 由 f' 单调不减可知 $\forall x \in I, \forall h \in \mathbb{R}$ 满足 $x+h \in I$, 都有 $f'(x+h) - f'(x)$ 与 h 同号, 故

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \geq 0 \implies f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \geq 0 \quad (5.3.46)$$

(5) \implies (3): $\forall x_1, x_2 \in I$ 且 $x_1 < x_2$, 由 Lagrange 中值定理可知 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} = f''(\xi) \geq 0 \implies f'(x_2) \geq f'(x_1) \quad (5.3.47)$$

□

注 若 f 在 I 上严格凸, 则 (1)(2)(4) 中的不等号需改为严格不等号, (3) 中 f' 需改为严格增; (5) 不再等价, 并且仅有 (5) \implies (3) ($f''(x) > 0 \implies f'$ 严格增) 成立. 其余的证明过程基本相近, 但需要注意 (2) \implies (3): $\forall x_1, x_5 \in I$ 且 $x_1 < x_5$, 取 $x_1 < x_3 < x_5$, 分别令 $x_2 \rightarrow x_1^+$ 、 $x_4 \rightarrow x_5^-$, 由 (2) 可得

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1^+} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_5) - f(x_3)}{x_5 - x_3} \leq \lim_{x_4 \rightarrow x_5^-} \frac{f(x_5) - f(x_4)}{x_5 - x_4} = f'(x_5) \quad (5.3.48)$$

定理 5.3.12

设 I 为开区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为凸函数, 则 $\forall x \in I$, f 的左右导数都存在, 从而 f 连续, 并且 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ 。

证明 由于 x 为内点, 故 $\exists \delta > 0$ 使得 $[x - \delta, x + \delta] \subseteq I$ 。令 $g: [-\delta, 0) \cup (0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $g(h) := \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, 由凸函数的等价定义可得

$$\begin{aligned} h_1 < h_2 < 0 &\implies \frac{f(x) - f(x+h_1)}{-h_1} \leq \frac{f(x) - f(x+h_2)}{-h_2} \implies g(h_1) \leq g(h_2) \\ h_1 < 0 < h_2 &\implies \frac{f(x) - f(x+h_1)}{-h_1} \leq \frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2} \implies g(h_1) \leq g(h_2) \\ 0 < h_1 < h_2 &\implies \frac{f(x+h_1) - f(x)}{h_1} \leq \frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2} \implies g(h_1) \leq g(h_2) \end{aligned} \quad (5.3.49)$$

故 g 在定义域内单调不减。当 $h < 0$ 时, $g(h)$ 有上界 $g(\delta)$, 因此 $\lim_{h \rightarrow 0^-} g(h) = f'_-(x)$ 存在; 当 $h > 0$ 时, $g(h)$ 有下界 $g(-\delta)$, 因此 $\lim_{h \rightarrow 0^+} g(h) = f'_+(x)$ 存在。由 g 单调不减可知 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ 。□

例 5.3.13

证明: $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$, 都有

$$x_1^{x_1} \cdots x_n^{x_n} \geq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^{x_1 + \cdots + x_n} \quad (5.3.50)$$

证明 考虑函数 $f(x) := x \ln x$, $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ ($\forall x > 0$), 因此 f 严格凸, 从而由 Jensen 不等式可得

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \quad (5.3.51)$$

即

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \ln \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \frac{x_1 \ln x_1 + \cdots + x_n \ln x_n}{n} \quad (5.3.52)$$

不等式两端同取 \exp 即可得到待证不等式。□

5.3.4 曲线的弯曲性质与渐近线

例 5.3.14

设 f 在区间 $[a, +\infty)$ 上是凸函数, $y = kx + b$ 是 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的一条渐近线。证明:

- (1) 若 f 可微, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = k$ 。
- (2) 若 f 可微, 则 $f(x) \geq kx + b, \forall x \geq a$ 。

(3) 若 f 严格凸, 则 $f(x) > kx + b, \forall x > a$ 。

证明 (1) 由 f 凸知 f' 单调不减, 于是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 存在, $A \in \mathbb{R}$ 当且仅当 f' 有上界。由渐近线的定义和 L'Hôpital 法则可得

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = A \quad (5.3.53)$$

(2) 考虑函数 $g(x) := f(x) - kx - b$, 则 $g'(x) = f'(x) - k$, 由 g 凸知 g' 单调不减, 故由 (1) 知 $g'(x) \leq g'(+\infty) = 0$, 因此 g 单调不增, 从而 $g(x) \geq g(+\infty) = 0$, 即 $f(x) \geq kx + b$ 。

(3) 考虑函数 $g(x) := f(x) - kx - b$, 则 g 严格凸, $g(+\infty) = 0$ 。

假设 $\exists x_1 \geq a$ 使得 $g(x_1) \leq 0$, 若存在 $x_2 > x_1$ 使得 $g(x_2) > g(x_1)$, 则 $\forall x > x_2$, 都有

$$\frac{g(x) - g(x_2)}{x - x_2} > \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (5.3.54)$$

从而

$$g(x) > g(x_2) + \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2) \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow +\infty \quad (5.3.55)$$

这与 $g(+\infty) = 0$ 矛盾。因此 $\forall x > x_1$, 都有 $g(x) \leq g(x_1)$, 于是 $0 = g(+\infty) \leq g(x_1)$, 从而 $g(x_1) = 0$ 。

$\forall x > x_1$, $g(x) \leq g(x_1) = 0$, 仿照上述可证明 $g(x) = 0$, 亦即 $g(x) \equiv 0 (\forall x \geq x_1)$, 这与 g 严格凸矛盾。因此 $\forall x > a$, 都有 $g(x) > 0$, 即 $f(x) > kx + b$ 。□

例 5.3.15

讨论函数 $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$ 的凹凸性和渐近线。

解 计算可得

$$f'(x) = 2(x-1) + \frac{2}{x+1}, \quad f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3} \quad (5.3.56)$$

所以当 $x < -1$ 时, $f''(x) < 0$, f 严格凹; 当 $x > -1$ 时, $f''(x) > 0$, f 严格凸。

注意到 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$, 所以 $x = -1$ 是 $y = f(x)$ 的竖直渐近线。又 $f(x) = 2x - 2 + o(1) (x \rightarrow \infty)$, 所以 $y = 2x - 2$ 是 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 的渐近线; 当 $x < -1$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 位于这条渐近线的下方; 当 $x > -1$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 位于这条渐近线的上方。□

例 5.3.16

讨论平面曲线 $x^3 + y^3 = 3xy$ 的渐近线和曲线的位置关系。

解 引入参数 $t = \frac{y}{x}$, 得到曲线的参数方程

$$x(t) = \frac{3t}{t^3 + 1}, \quad y(t) = \frac{3t^2}{t^3 + 1}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad (5.3.57)$$

当 $t \rightarrow -1$ 时, $x(t) \rightarrow \infty$, 此时

$$\frac{y(t)}{x(t)} = t \rightarrow -1, \quad y(t) + x(t)t = \frac{3t(1+t)}{1+t^3} \rightarrow -1, \quad t \rightarrow -1 \quad (5.3.58)$$

所以 $y = -x - 1$ 是曲线在无穷远处的渐近线。注意到

$$y(t) + x(t) + 1 = \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{1 + t^3} = \frac{(t+1)^2}{1-t+t^2} > 0 \quad (5.3.59)$$

所以曲线位于渐近线的上方。 \square

5.4 期中讲评

例 5.4.1

计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x - \sin x} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 10} \cdot \frac{x - \ln(e^x + x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{2}{x}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x - \sin 3x)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+\sqrt{k}} \right) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{\sin x} + \sqrt[3]{1-\cos x}) - \sin x}{\arctan(\sqrt[3]{1-\cos x})} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)^n}{\prod_{k=1}^n (1 - \sqrt[k]{\sin x})} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (10) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+4}-2} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (11) \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \cdot \ln(1-x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x \cdot \sqrt{1-2x^2}}{1+x^2 - \cos 2x} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (12) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{2}{\ln(1+2x)} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(13) \text{ 设 } x_0 > 0, x_{n+1} = \ln(1+x_n) (n \in \mathbb{N}). \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha x_n = A \neq 0 \text{ 存在, 则 } \alpha = \underline{\hspace{2cm}}, A = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 (1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -2 \quad (5.4.1)$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{2}{x}} = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \ln \left[2 - \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x} \right] = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \left[\frac{x}{2} + o(x) \right] = e \quad (5.4.2)$$

(3)

$$\begin{aligned} L(n) &:= 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{k}} = 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{\sqrt{k}}{n}\right)^{-1} \\ &= 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sqrt{k}}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{k}{n^2}\right)\right) = \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^{3/2}} + \frac{\sum_{k=1}^n \mathcal{O}(k)}{n^{5/2}} \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

其中 \mathcal{O} 对 k 一致, 利用积分可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^{3/2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \quad (5.4.4)$$

此外注意到 $\sum_{k=1}^n \mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(n^2)$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \mathcal{O}(k)}{n^{5/2}} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} L(n) = \frac{2}{3} \quad (5.4.5)$$

(4) 令 $t = \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 0^+$, 此时

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \sin x)^n}{\prod_{k=1}^n (1 - \sqrt[k]{\sin x})} &= \frac{(1 - \cos t)^n}{\prod_{k=1}^n [1 - (\cos t)^{1/k}]} = \frac{\left(\frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^n}{\prod_{k=1}^n \left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^{1/k}\right]} \\ &= \frac{\frac{t^{2n}}{2^n} + o(t^{2n})}{\prod_{k=1}^n \left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{2k} + o(t^2)\right)\right]} = \frac{\frac{t^{2n}}{2^n} + o(t^{2n})}{\prod_{k=1}^n \left(\frac{t^2}{2k} + o(t^2)\right)} = \frac{\frac{t^{2n}}{2^n} + o(t^{2n})}{\frac{t^{2n}}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} + o(t^{2n})} \rightarrow n! \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

(5) 令 $t = x - 2 \rightarrow 0$, 则

$$\frac{3 - \sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x^2 + 4} - 2} = \frac{3 - \sqrt{9 + 12t + 6t^2 + t^3}}{\sqrt[3]{8 + 4t + t^2} - 2} = -\frac{3 \left[1 + \frac{4}{3}t + o(t)\right]^{1/2} - 1}{2 \left[1 + \frac{t}{2} + o(t)\right]^{1/3} - 1} = -\frac{3 \frac{2}{3}t + o(t)}{2 \frac{1}{6}t + o(t)} \rightarrow -6 \quad (5.4.7)$$

(6)

$$\frac{1 - \cos 2x \cdot \sqrt{1 - 2x^2}}{1 + x^2 - \cos 2x} = \frac{1 - (1 - 2x^2 + o(x^2))(1 - x^2 + o(x^2))}{1 + x^2 - (1 - 2x^2 + o(x^2))} = \frac{3x^2 + o(x^2)}{3x^2 + o(x^2)} \rightarrow 1 \quad (5.4.8)$$

(7)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 10} \cdot \frac{x - \ln(e^x + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{10}{x^2}} \ln \frac{e^x}{e^x + x} = 1 \times 0 = 0 \quad (5.4.9)$$

(8)

$$\frac{(3x - \sin 3x)e^{-x^2}}{\sqrt{1 - x^3} - 1} = \frac{\left(\frac{(3x)^3}{6} + o(x^3)\right)(1 + o(1))}{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \frac{\frac{9}{2}x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} \rightarrow -9 \quad (5.4.10)$$

(9)

$$\begin{aligned} L(x) &:= \frac{\ln(e^{\sin x} + \sqrt[3]{1 - \cos x}) - \sin x}{\arctan(\sqrt[3]{1 - \cos x})} = \frac{\ln \left[e^{o(x^{2/3})} + \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{1/3} \right] - o(x^{2/3})}{\arctan \left[\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{1/3} \right]} \\ &= \frac{\ln \left[1 + 2^{-1/3}x^{2/3} + o(x^{2/3}) \right] - o(x^{2/3})}{\arctan \left[2^{-1/3}x^{2/3} + o(x^{2/3}) \right]} = \frac{2^{-1/3}x^{2/3} + o(x^{2/3})}{2^{-1/3}x^{2/3} + o(x^{2/3})} \rightarrow 1 \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

(10)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \ln \left(1 + \frac{2e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \cdot \frac{2e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = 2 \quad (5.4.12)$$

(11)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{x(\ln x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\ln x)^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{2 \ln x}{x}}{-1} = 0 \quad (5.4.13)$$

(12) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 由 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned} x + \sqrt{1+x^2} &= x + 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \ln(x + \sqrt{1+x^2}) &= \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x + o(x^2) \\ \ln(1+2x) &= 2x - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = 2x - 2x^2 + o(x^2) \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

故所求极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x + o(x^2)} - \frac{1}{x - 2x^2 + o(x^2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = -1 \quad (5.4.15)$$

(13) 容易证明 $\{x_n\}$ 严格减且有下界 0, 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 其值为 $x = \ln(x+1)$ 的唯一零点 $x = 0$ 。由于 $\frac{1}{x_n}$ 严格增且趋于 $+\infty$, 利用 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha x_n \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1}{\frac{x_n}{\ln(1+x_n)} - 1} \\ &= A \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{x_n}{2} + o(x_n)} = \frac{2A}{\alpha} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx_n} \implies \alpha = 1, \quad A = 2 \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

再利用 Stolz 定理验证极限的存在性, 可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{\frac{x_n}{\ln(1+x_n)} - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{\frac{x_n}{2} + o(x_n)} = 2 \quad (5.4.17)$$

□

注 (3) 也可以不用积分。Abel 求和公式 (分部求和) 给出

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}), \quad A_k = \sum_{i=1}^k a_i \quad (5.4.18)$$

令 $a_k = 1$, $b_k = \sqrt{k}$ 可得

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = n\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n-1} k (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) = n\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \quad (5.4.19)$$

将求和项拆成主项和余项, 得到

$$\frac{k}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k}}{2} - \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k = \frac{\sqrt{k}}{2(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})^2} \implies \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - n\sqrt{n} - \frac{\sqrt{n}}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \quad (5.4.20)$$

分析可得

$$\frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}}{4} = \frac{1}{4(\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2})} < \varepsilon_k < \frac{1}{4(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{4} \quad (5.4.21)$$

因此

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{2}}{4} < \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) < \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k < \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \frac{\sqrt{n} - 1}{4} \quad (5.4.22)$$

亦即

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{4(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} - \frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - n\sqrt{n} - \frac{3}{4}\sqrt{n} < -\frac{1}{4}, \quad n > 1 \quad (5.4.23)$$

故有

$$-\frac{\sqrt{2}}{6} < \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \frac{2}{3}n^{3/2} - \frac{1}{2}\sqrt{n} < -\frac{1}{6} \quad (5.4.24)$$

例 5.4.2

计算极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{(\ln x)^x}$.

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{\tan x - \arcsin x}$.

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \sqrt[3]{9n^2 - n^3})$.

(4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \right)$.

解 (1) 令 $t = \ln x \rightarrow +\infty$, 则

$$\frac{x \ln x}{(\ln x)^x} = \exp[(\ln x)^2 - x \ln \ln x] = \exp[t^2 - e^t \ln t] \leq \exp[t^2 - e^t] \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty \quad (5.4.25)$$

(2)

$$n + \sqrt[3]{9n^2 - n^3} = n \left(1 + \sqrt[3]{1 - \frac{9}{n}} \right) = n \left(\frac{9}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \rightarrow 3, \quad n \rightarrow +\infty \quad (5.4.26)$$

(3)

$$\frac{\sin x - \arctan x}{\tan x - \arcsin x} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0 \quad (5.4.27)$$

(4) 解法一: 利用 Stolz 定理可得

$$\text{LHS} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\ln(n+1) - \ln n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]} = \frac{1}{2} \quad (5.4.28)$$

解法二: 利用此前证明过的

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1), \quad n \rightarrow +\infty \quad (5.4.29)$$

故有

$$\text{LHS} = \frac{[\ln(2n) + \gamma + o(1)] - \frac{1}{2}[\ln n + \gamma + o(1)]}{\ln n} = \frac{\frac{1}{2} \ln n + \mathcal{O}(1)}{\ln n} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad n \rightarrow +\infty \quad (5.4.30)$$

□

例 5.4.3

求 $\sec x := \frac{1}{\cos x}$ 在 $x = 0$ 处带 4 阶 Peano 余项的 Taylor 展开式。

解 已知

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0 \quad (5.4.31)$$

利用待定系数法可得

$$\sec x = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0 \quad (5.4.32)$$

□

例 5.4.4 (第八届百度数学吧吧赛大学非数组· 法官)

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 称 f 在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处拟递增, 若存在一个趋于 0 的正序列 $\{h_n\}$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \geq 0 \quad (5.4.33)$$

(1) 试构造 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, 满足 f 在 $x = 0$ 处拟递增, 但 f 在任意包含 $x = 0$ 的区间内不单调。

(2) 设 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, 且在任意 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处拟递增, 证明: f 在 \mathbb{R} 上单调递增。

解 (1) 取

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad h_n = \frac{1}{n\pi}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(0 + h_n) - f(0)}{h_n} = 0 \quad (5.4.34)$$

故 f 在 $x = 0$ 处拟递增, 而显然 f 在 $\left[\frac{1}{2(n+1)\pi}, \frac{1}{2n\pi}\right]$ 中不单调。

(2) 设 $x_1 > x_0$, 记 $k := \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, 构造

$$F(x) = f(x) - f(x_0) - k(x - x_0) \quad (5.4.35)$$

则 $F(x_0) = F(x_1) = 0$ 。由于 F 在 $[x_0, x_1]$ 上连续, 故 $\exists \xi \in [x_0, x_1]$ 使得 $F(\xi)$ 为该区间上的最大值, 因此 $\forall x \in (\xi, x_1)$, 都有

$$0 \geq \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x} = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} - k \implies k \geq \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \quad (5.4.36)$$

对 ξ 应用拟递增条件, 存在趋于 0 的正序列 $\{h_n\}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(\xi + h_n) - f(\xi)}{h_n} \geq 0$ 。

取 $x = \xi + h_n$, 利用极限的保序性可得

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = k \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(\xi + h_n) - f(\xi)}{h_n} \geq 0 \quad (5.4.37)$$

即 $f(x_1) \geq f(x_0)$ 。故 f 在 \mathbb{R} 上单调递增。 \square

例 5.4.5 (高等微积分·艾·作业)

设函数 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 严格单调递增, 且满足:

- $\forall b \geq 1$, 都有 $f(\frac{1}{b}) < \frac{1}{b+1}$;
- $\forall t > 1$, $\exists M \geq 1$, 使得 $b \geq M \implies f(\frac{1}{b}) > \frac{1}{b+t}$ 。

设 $a_1 \in (0, 1)$, 定义数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_{n+1} = f(a_n)$, 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 1$ 。

证明 令 $x = \frac{1}{b}$, $\varepsilon = t - 1$, $\delta = \frac{1}{M}$, 则题设 f 满足的条件可化为: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得

$$0 < x < \delta \implies 1 < \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x} < 1 + \varepsilon \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x} \right] = 1 \quad (5.4.38)$$

且有 $0 < x \leq 1 \implies 0 \leq f(0) < f(x) < \frac{x}{1+x} < x$ 。

令 $x \rightarrow 0^+$ 可得 $f(0) = 0$, 故 $0 < x \leq 1 \implies 0 < f(x) < x$, 即 $x = 0$ 为 f 在 $[0, 1]$ 的唯一不动点。由于 $a_1 \in (0, 1)$, 归纳可证

$$0 < a_{n+1} = f(a_n) < \frac{a_n}{1 + a_n} < a_n \quad (5.4.39)$$

故 $\{a_n\}$ 严格减且有下界 0, 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x^*$ 存在, 且满足 $x^* = f(x^*)$, 即 $x^* = 0$ 。

由于 $\frac{1}{a_n}$ 严格增且趋于 $+\infty$, 由 Stolz 定理和 Heine 定理可得

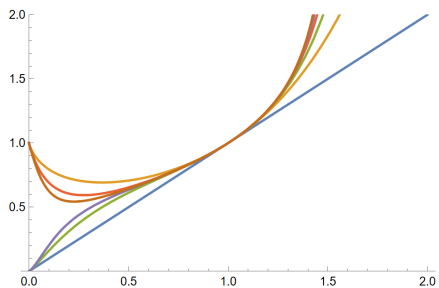
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x}} = 1 \quad (5.4.40)$$

\square

例 5.4.6 (2023 秋期中考试拓展)

设 $a \in (0, +\infty)$, $x_1 = a$, $x_{n+1} = a^{x_n}$. 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 求 a 的取值范围, 并求出该极限值.

```
Plot[{x, x^x, x^{x^x}, x^{x^{x^x}}, x^{x^{x^{x^x}}}, x^{x^{x^{x^{x^x}}}}], {x, 0, 2}, PlotRange -> {0, 2},
[绘图] [绘制范围]
PlotLegends -> {"1", "2", "3", "4", "5", "6"}]
[绘图的图例]
```

(a) $f(x) = x \uparrow n$ 的图像

```
ContourPlot[y = x^y, {x, 0, 2}, {y, 0, 4}, MaxRecursion -> 8,
[绘制等高线] [最大递归]
FrameLabel -> {"Initial Value a", "Limit Value A"},
[边框标签]
AspectRatio -> 1/2]
[宽高比]
```

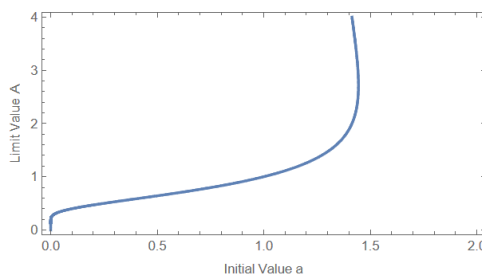
(b) 隐函数 $A = a^A$ 的图像

图 5.4.1: 验证极限的存在性

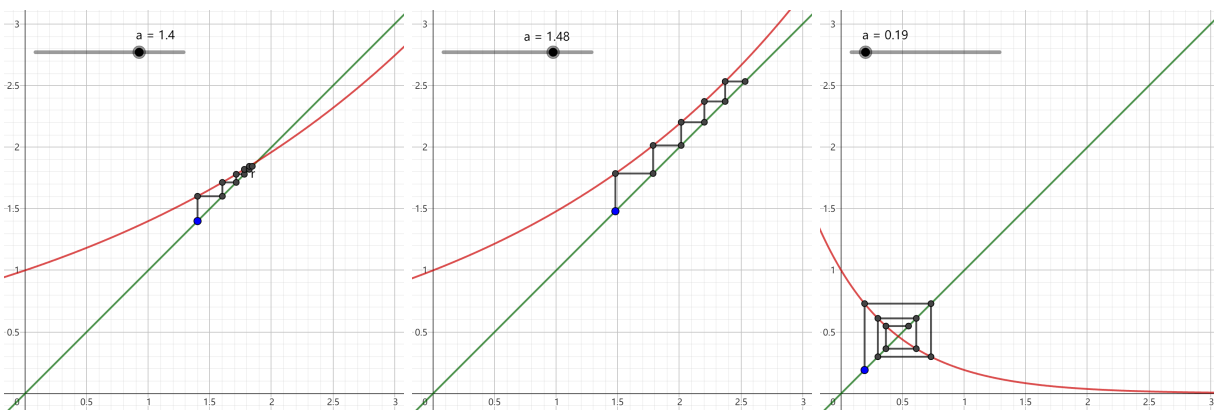
(a) $a > 1$ 时的典型迭代图 1(b) $a > 1$ 时的典型迭代图 2(c) $0 < a < 1$ 时的典型迭代图

图 5.4.2: 数列的迭代图

思路 我们可以从以下几个角度考察这道题。

(1) 归纳可证 $x_n = a \uparrow n = \underbrace{a^{a^{\dots^a}}}_n$. 我们先从 $f(x) = x \uparrow n$ 的图像出发, 如图 5.4.1(a) 所示。

- 当 x 较大时, $f(x)$ 的图像会发散。
- 当 x 较小时, $x \uparrow (2k+1)$ 在 $x = 0^+$ 处的极限为 0, 而 $x \uparrow (2k)$ 在 $x = 0^+$ 处的极限为 1 (其中 $k \in \mathbb{N}$),

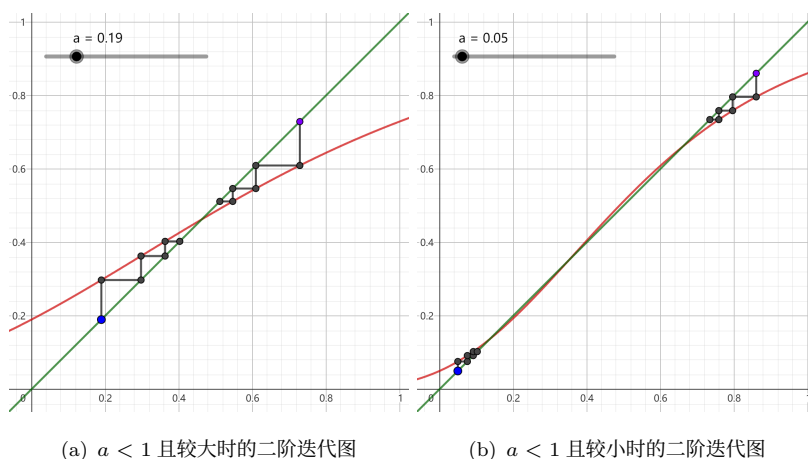


图 5.4.3: 数列的二阶迭代图

来回跳跃，“显然”不收敛。

- 当 x 的大小合适时，这六条函数图像近乎重合，表明极限收敛。

因此我们可以朴素地猜想： a 的取值范围既有上确界，也有正的下确界。

(2) 我们再来考察数列的**极限值**。假设数列收敛，且极限为正数 A ，则有

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{x_n} = a^A \quad (5.4.41)$$

我们以 a 为横坐标、 A 为纵坐标绘制 $A = a^A$ 的图像，如图 5.4.1(b) 所示。我们容易发现，图像有一个明显的右边界，当 a 大于某个值时，极限不存在。借助导数的知识可以求得 $a \leq e^{1/e}$ 。

(3) 我们注意到这是一个不动点迭代的形式，故我们最后考察数列的不动点迭代图，又称“蛛网图”，即不断将 (x_n, x_n) 、 $(x_n, x_{n+1} = f(x_n))$ 绘制在 $y = x$ 和 $y = f(x)$ 这两条曲线上，再用线段依次连接，如图 5.4.2 所示。图中蓝色的点为迭代起点。观察可知：

- 当 $a > 1$ 而比较小时，迭代图单调递增且会收敛于两条曲线的交点处。
- 当 $a > 1$ 而比较大时， $y = a^x$ 会与 $y = x$ 分离，此时的迭代图仍单调递增且会不断向右上方发散，经过计算可得这两条曲线相切的临界值就是 $a = e^{1/e}$ 。
- 当 $0 < a < 1$ 时，迭代图呈现“回”字形，而且分居在不动点的两侧——奇数项子列单调递增且以不动点作为上界，偶数项子列单调递减且以不动点作为下界，故两个子列分别收敛，而极限是否相同仍未可知。

这启发我们研究这两个子列的迭代模式，故我们接下来考虑二阶迭代 $x_{n+2} = g(x_n) := a^{a^{x_n}}$ ，如图 5.4.3 所示。图中蓝色的点为奇数项子列的迭代起点，紫色的点为偶数项子列的迭代起点。观察可知：

- 当 $a < 1$ 且较大时， $y = a^{a^x}$ 与 $y = x$ 仅有一个交点（亦即 g 仅有一个不动点），此时的两个极限收敛于相同的不动点。

- 当 $a < 1$ 且较小时, g 出现了三个不动点, 此时奇数项子列收敛于最小的不动点、偶数项子列收敛于最大的不动点, 两者严格位于中间的不动点两侧, 因此数列不收敛, 这也与我们之前分析的“ $\{x_n\}$ 在 0 和 1 之间来回跳跃”相吻合。经计算可得, 此时的 a 满足 $0 < a < e^{-e}$ 。

整理好以上思路, 我们开始证明。由于证明过程涉及两个不动点迭代函数 $y = a^x$ 和 $y = a^{a^x}$, 故在证明开始前, 我们先研究一下它们的性质。

推论 5.4.7

(1) 设 $a > 0$, 则 $y = a^x$ 与 $y = x$ 的交点个数为

$$\begin{cases} 2, & 1 < a < e^{1/e} \\ 1, & a = e^{1/e} \vee 0 < a \leq 1 \\ 0, & a > e^{1/e} \end{cases} \quad (5.4.42)$$

且当 $1 < a < e^{1/e}$ 时, 设两个交点的横坐标为 $x_1^* < x_2^*$, 则有 $x_1^* < \frac{1}{\ln a} < x_2^*$ 。

(2) 设 $a > 0$, 则 $y = a^{a^x}$ 与 $y = x$ 的交点个数为

$$\begin{cases} 3, & 0 < a < e^{-e} \\ 2, & 1 < a < e^{1/e} \\ 1, & e^{-e} \leq a \leq 1 \vee a = e^{1/e} \\ 0, & a > e^{1/e} \end{cases} \quad (5.4.43)$$

且当 $e^{-e} \leq a < 1$ 时, 设唯一交点的横坐标为 x^* , 则有 $a < x^* < a^a$ 且 $a^{x^*} = x^*$; 当 $0 < a < e^{-e}$ 时, 设三个交点的横坐标为 $x_1^* < x^* < x_2^*$, 则有 $a < x_1^* < x^* < x_2^* < a^a$ 且 $a^{x^*} = x^*$ 。

证明 由于 a^x 和 a^{a^x} 均为正数, 故所有交点均在第一象限。

(1) 设函数 $f(x) = x \ln a - \ln x$, 求导可得 $f'(x) = \ln a - \frac{1}{x}$ 。当 $0 < a \leq 1$ 时, f 在 \mathbb{R}^+ 上严格减, 此时 $f(0^+) = +\infty$, $f(1) = \ln a < 0$, 故 f 在 $(0, 1)$ 上有唯一零点, 即 $y = a^x$ 与 $y = x$ 有横坐标位于 $(0, 1)$ 的唯一交点。

当 $a > 1$ 时, f 在 $(0, \frac{1}{\ln a}]$ 上严格减, 在 $[\frac{1}{\ln a}, +\infty)$ 上严格增, f 的最小值满足

$$f\left(\frac{1}{\ln a}\right) = 1 - \ln \frac{1}{\ln a} = 1 + \ln \ln a \quad (5.4.44)$$

注意到 $f(1) = \ln a > 0$, $f(+\infty) = +\infty$, 因此

- 当 $1 + \ln \ln a > 0$, 即 $a > e^{1/e}$ 时, f 无零点, 即两曲线无交点。
- 当 $a = e^{1/e}$ 时, f 有唯一零点 $x = \frac{1}{\ln a} = e$, 即两曲线有唯一交点 (e, e) 。
- 当 $1 < a < e^{1/e}$, f 有两个零点 $x_1^* \in (0, \frac{1}{\ln a})$, $x_2^* \in (\frac{1}{\ln a}, +\infty)$, 即 $x_1^* < \frac{1}{\ln a} < x_2^*$ 。

(2) 当 $a = 1$ 时, 显然 $y = a^{a^x}$ 与 $y = x$ 仅有一个交点。当 $a > 1$ 时, 注意到

$$\begin{cases} a^x > x \implies a^{a^x} > a^x > x \\ a^x < x \implies a^{a^x} < a^x < x \\ a^x = x \implies a^{a^x} = a^x = x \end{cases} \quad (5.4.45)$$

故 $y = a^{a^x} - x$ 与 $y = a^x - x$ 始终同号, 因此结论也相同—当 $1 < a < e^{1/e}$ 时, $y = a^{a^x}$ 与 $y = x$ 有两个交点; 当 $a = e^{1/e}$ 时, $y = a^{a^x}$ 与 $y = x$ 有一个交点; 当 $a > e^{1/e}$ 时, $y = a^{a^x}$ 与 $y = x$ 无交点。

当 $0 < a < 1$ 时, 设函数 $g(x) = x \ln a - \ln \frac{\ln x}{\ln a}$, 求导可得 $g'(x) = \ln a - \frac{1}{x \ln x}$ 。容易验证 $x \ln x$ 在 e^{-1} 处取得最小值 $-e^{-1}$ 。因此

- 当 $\frac{1}{\ln a} > e$, 即 $0 < a < e^{-e}$ 时, g' 有两个零点 ξ_1, ξ_2 满足 $\xi_1 \ln \xi_1 = \xi_2 \ln \xi_2 = \frac{1}{\ln a}$ 且 $\xi_1 < \frac{1}{e} < \xi_2$, 此时 g 在 $(0, \xi_1]$ 上严格增、在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上严格减、在 $[\xi_2, 1)$ 上严格增。代入消去 $\ln a$ 可得

$$g(\xi_i) = \xi_i \ln a - \ln \frac{\ln \xi_i}{\ln a} = -\ln \xi_i + \frac{1}{\ln \xi_i} - 2 \ln(-\ln \xi_i), \quad i = 1, 2 \quad (5.4.46)$$

令 $t_i = -\ln \xi_i$, 则 $t_1 > 1 > t_2$, 考察函数 $h(t) = t - \frac{1}{t} - 2 \ln t$, 求导可得

$$h'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} = \frac{(t-1)^2}{t} > 0, \quad t \neq 1 \quad (5.4.47)$$

故 $h(t)$ 在 \mathbb{R}^+ 上严格增, 因此

$$g(\xi_2) = h(t_2) < h(1) = 0 < h(t_1) = g(\xi_1) \quad (5.4.48)$$

注意到 $g(a) = a \ln a < 0$ 、 $g(a^a) = (a^a - 1) \ln a > 0$, 故 $\exists x_1^* \in (a, \xi_1)$ 、 $x^* \in (\xi_1, \xi_2)$ 、 $x_2^* \in (\xi_2, a^a)$ 为 g 的零点。设 $x^\#$ 为 $y = a^x$ 与 $y = x$ 的唯一交点, 则 $x^\# \in \{x_1^*, x^*, x_2^*\}$, 且注意到

$$f(\xi_i) = \xi_i \ln a - \ln \xi_i = \frac{1 - \ln^2 \xi_i}{\ln \xi_i} = \frac{t_i^2 - 1}{t_i} \implies f(\xi_1) > f(x^\#) = 0 > f(\xi_2) \quad (5.4.49)$$

由于 f 在 \mathbb{R}^+ 上严格减, 故 $a < x_1^* < \xi_1 < x^\# < \xi_2 < x_2^* < a^a$, 因此 $x^* = x^\#$, 即 $a^{x^*} = x^*$ 。

- 当 $\frac{1}{\ln a} \leq e$, 即 $e^{-e} \leq a < 1$ 时, $g' > 0$ ($x \neq \frac{1}{e}$), g 在 \mathbb{R}^+ 上严格增。注意到 $g(a) = a \ln a < 0$ 、 $g(a^a) = (a^a - 1) \ln a > 0$, 故 g 在 (a, a^a) 上存在唯一零点 x^* , 同理 $x^* = a^{x^*}$ 。

□

解 1° 当 $a = 1$ 时, $\{x_n\}$ 显然收敛到 1。

2° 当 $1 < a \leq e^{1/e}$ 时, 设 x^* 为方程 $a^x = x$ 的零点集的最小值。注意到 $x_2 = a^a > a = x_1$, 归纳可证

$$x_{n+2} = a^{x_{n+1}} > a^{x_n} = x_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.4.50)$$

故 $\{x_n\}$ 严格增; 归纳可证

$$x_{n+1} = a^{x_n} \leq a^{x^*} = x^*, \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.4.51)$$

故 $\{x_n\}$ 有上界 x^* , 因此 $\{x_n\}$ 收敛, 且极限值 ξ 为方程 $a^x = x$ 的零点。由于 $a_n \leq x^*$, 令 $n \rightarrow +\infty$ 可得 $\xi \leq x^*$; 另一方面 $\xi \geq x^*$ (x^* 为较小零点), 故 $\xi = x^*$ 。

3° 当 $a > e^{1/e}$ 时, 结合不动点迭代图的启发, 我们采取如下放缩:

$$a^x \geq f'(x^*)(x - x^*) + f(x^*), \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.4.52)$$

此处 x^* 满足

$$f'(x^*) = a^{x^*} \ln a = 1 \implies x^* = -\frac{\ln \ln a}{\ln a} \quad (5.4.53)$$

因此

$$a^x \geq x - x^* + f(x^*) = x + \frac{\ln \ln a + 1}{\ln a} \quad (5.4.54)$$

当 $a > e^{1/e}$ 时, 恰有 $\frac{\ln \ln a + 1}{\ln a} > 0$, 归纳可证

$$x_{n+1} = a^{x_n} \geq x_n + \frac{\ln \ln a + 1}{\ln a} \geq a + n \frac{\ln \ln a + 1}{\ln a}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.4.55)$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 可得 $x_n \rightarrow +\infty$, 故极限不存在。

也可采用**反证法**。假设当 $a > e^{1/e}$ 时 $\{x_n\}$ 收敛, 则极限值 ξ 为方程 $a^x = x$ 的零点, 而由引理可知当 $a > e^{1/e}$ 时该方程无零点, 矛盾! 因此数列不收敛。

4° 当 $0 < a < 1$ 时, 设 x_1^*, x_2^* 为方程 $a^x = x$ 的零点集的最小值、最大值, x^* 为方程 $a^x = x$ 的唯一零点。考察原数列的奇数项子列和偶数项子列, 它们均满足递推关系式 $x_{n+2} = a^{a^{x_n}}$, 且 $x_1 = a < x^* < a^a = x_2$ 。设 $x^\#$ 为方程 $a^x = x$ 的任一零点, 容易归纳证明

$$\begin{cases} x_{n+2} > x_n \implies x_{n+4} = a^{a^{x_{n+2}}} > a^{a^{x_n}} = x_{n+2} \\ x_{n+2} < x_n \implies x_{n+4} = a^{a^{x_{n+2}}} < a^{a^{x_n}} = x_{n+2} \\ x_n > x^\# \implies x_{n+2} = a^{a^{x_n}} > a^{a^{x^\#}} = x^\# \\ x_n < x^\# \implies x_{n+2} = a^{a^{x_n}} < a^{a^{x^\#}} = x^\# \end{cases} \quad (5.4.56)$$

由于 $x_3 = a^{a^a} > a^1 = x_1$, $x_4 = a^{a^{x_3}} < a^{x_1} = x_2$, 且 $x_1 = a < x_1^*$, $x_2 = a^a > x_2^*$, 故 $\{x_n\}$ 的奇数项子列严格增且有上界 x_1^* 、偶数项子列严格减且有下界 x_2^* , 均收敛, 设它们的极限为 ξ_1, ξ_2 。由于 $x_{2k-1} < \xi_1 \leq \xi_2 < x_{2k}$ ($\forall k, k' \in \mathbb{N}^*$), 令 $k, k' \rightarrow +\infty$ 可得 $\xi_1 \leq x_1^* \leq x_2^* \leq \xi_2$; 另外 ξ_1, ξ_2 也是方程 $a^x = x$ 的零点, 故 $x_1^* \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq x_2^*$ (x_1^*, x_2^* 为方程 $a^x = x$ 的零点集的最小值、最大值), 因此 $\xi_1 = x_1^* \leq x_2^* = \xi_2$ 。

- 当 $e^{-e} \leq a < 1$ 时, $x_1^* = x^* = x_2^*$, 故奇数项子列和偶数项子列收敛于同一极限值 x^* , 原数列同样收敛与 x^* 。
- 当 $0 < a < e^{-e}$ 时, $x_1^* < x^* < x_2^*$, 故奇数项子列和偶数项子列收敛于不同极限值, 原数列发散。

综上所述, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在的充要条件为 $e^{-e} \leq a \leq e^{1/e}$, 且极限值 x^* 为方程 $x^* = a^{x^*}$ 的较小零点。 \square

第6次习题课 期中考试评讲

2025年11月19日。

6.1 2025秋《微积分 A(1)》期中考试

例 6.1.1 (第1题)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \text{_____} \quad (6.1.1)$$

- (A) 1 (B) e^{-1} (C) $-e$ (D) e

例 6.1.2 (第2题)

设 $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$ ($n \geq 1$), 则数列 $\{x_n\}$ _____。

- (A) 单调减, 且收敛 (C) 单调减, 但是不收敛
(B) 单调增, 且收敛 (D) 单调增, 但是不收敛

例 6.1.3 (第3题)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) = \text{_____} \quad (6.1.2)$$

- (A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

例 6.1.4 (第4题)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{2x^2 + 1}\right) = \text{_____} \quad (6.1.3)$$

- (A) 不存在 (B) $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

例 6.1.5 (第5题)

点 $x_0 = 0$ 是函数 $f(x) = \frac{\ln(1+e^{2/x})}{\ln(1+e^{1/x})}$ 的 _____。

- (A) 连续点 (B) 可去间断点 (C) 跳跃间断点 (D) 第二类间断点

例 6.1.6 (第6题)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[6]{x} - 1} = \text{_____} \quad (6.1.4)$$

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

例 6.1.7 (第7题)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \text{_____} \quad (6.1.5)$$

- (A) 1 (B) $e^{-1/3}$ (C) $-\frac{1}{3}$ (D) e^{-1}

例 6.1.8 (第8题)

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是 _____。

- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$ (C) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$

例 6.1.9 (第9题)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = \text{_____} \quad (6.1.6)$$

- (A) 1 (B) e (C) e^2 (D) e^{-1}

例 6.1.10 (第10题)

下列极限中, 能使用洛必达法则计算的是 _____。

- (A) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ (B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - \cos x}{x + \cos x}$ (C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{-x}}{x + 2 \sin x}$ (D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin x}{x - \sin x}$

例 6.1.11 (第11题)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 中有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 。以下结论正确的是 _____。

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$, 则 f 在 $x = 0$ 处可导
- (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$, 则 f 在 $x = 0$ 处可导
- (C) 若 f 在 $x = 0$ 处可导, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$
- (D) 若 f 在 $x = 0$ 处可导, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

例 6.1.12 (第 12 题)

函数 $y = \tan(2 \sin x)$ 在 $x = 0$ 的邻域中确定了反函数 $x = g(y)$, 则 $g'(0) =$ _____。

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

例 6.1.13 (第 13 题)

设方程 $x^y = y^x$ 在 $(4, 2)$ 附近确定了一个可微函数 $y = y(x)$, 则 $y'(4) =$ _____。

- (A) $\frac{2 \ln 2 + 1}{4(\ln 2 - 1)}$ (B) $\frac{2 \ln 2 - 1}{4(\ln 2 - 1)}$ (C) $\frac{2(\ln 2 - 1)}{\ln 2 - 2}$ (D) $\frac{1}{2}$

例 6.1.14 (第 14 题)

设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导当且仅当 _____。

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^x)}{\sqrt{x}}$ 收敛 (B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos x)}{x^2}$ 收敛 (C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x}$ 收敛 (D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x - \sin x)}{x^3}$ 收敛

例 6.1.15 (第 15 题)

$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处 _____。

- (A) 不连续 (C) 可导但导函数不连续
- (B) 连续但不可导 (D) 可导且导函数连续

例 6.1.16 (第 16 题)

以下结论中, 不能由 $f(x) - f(0) = \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$ ($x \rightarrow 0$) 得到是 _____。

- (A) $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处连续 (C) $f''(0) = 0, f'''(0) = 1$
- (B) $f'(0) = 0$ (D) $x_0 = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点

例 6.1.17 (第 17 题)

设 $f(x) = x^3 e^x$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的 4 阶导数 $f^{(4)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- (A) 36 (B) 24 (C) 12 (D) 6

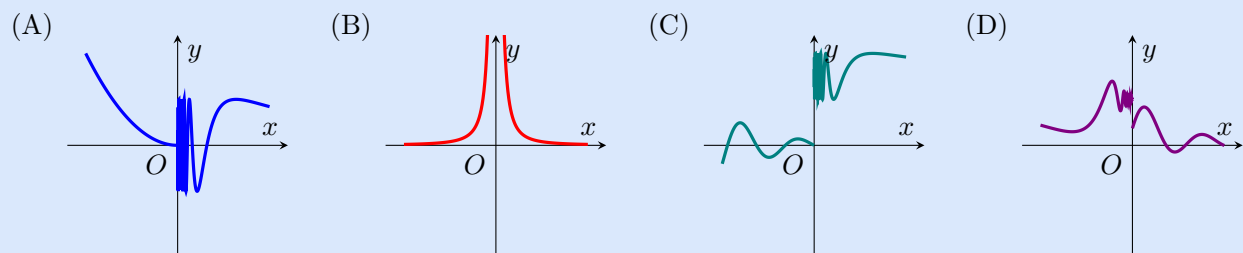
例 6.1.18 (第 18 题)

方程 $x^4 + x^3 + 3x^2 - 100x - 1 = 0$ 在实轴上恰有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个根。

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

例 6.1.19 (第 19 题)

以下哪个图可能是导函数的图像: $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



例 6.1.20 (第 20 题)

函数 $e^{\sin x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的带 Peano 余项的 3 阶 Taylor 公式为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- (A) $1 + x + x^2 + o(x^3)$ (C) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
 (B) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ (D) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

例 6.1.21 (第 21 题)

下列条件中可以推出数列 $\{a_n\}$ 收敛的是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- (A) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N 和正整数 p , 使得对任意 $n > N$ 都有 $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$
 (B) 存在正整数 N , 使得对任意 $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ 数列 $\{a_{nN+k}\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛
 (C) 存在正整数 k , 使得 $\{a_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛
 (D) 存在正整数 N 和正整数 T , 使得对任意 $n > N$ 都有 $n(a_n - a_{n+T}) = T a_{n+T}$

例 6.1.22 (第 22 题)

以下结论不正确的是_____。

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x} = 1$ (C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x} = 1$
 (B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \tan(\sin x)}{\tan x - \sin x} = 1$ (D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \tan(\sin x)}{\sin(\tan x) - \sin(\sin x)} = 1$

例 6.1.23 (第 23 题)

设 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为两个实函数, 下列说法不正确的是_____。

- (A) 若 g 连续且 f 单调有界, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x))$ 存在且有限
 (B) 若 f 在 $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ 中每一点处的极限都存在且有限, 则 f 有界
 (C) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{u \rightarrow a} g(u) = b \in \mathbb{R}$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = b$
 (D) 若 g 连续且 f 有界, 则函数 $g(f(x))$ 有界

例 6.1.24 (第 24 题)

以下正确的结论是_____。

- (A) 若函数 f 在任意一点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处的极限都为 0, 则 $f(x) \equiv 0$
 (B) 若 f, g 可导, $g'(x) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$
 (C) 设 f 在 $(0, +\infty)$ 中可导, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$
 (D) 设 f 在 $(0, +\infty)$ 中可导, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

例 6.1.25 (第 25 题)

设 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为两个实函数, 下列说法不正确的是_____。

- (A) 若 f 在 \mathbb{R} 上可导, 且 $\forall x \in \mathbb{R}$ 都有 $f'(x) \neq 0$, 则 $f'(x)$ 在 \mathbb{R} 上不变号
 (B) 若 f 在 $x = 0$ 处可导且 $f'(0) > 0$ 则存在 $\delta > 0$ 使得 f 在区间 $(-\delta, \delta)$ 中单调递增
 (C) 若 f 在 $x = 0$ 处连续, 且 $g'(0) = g(0) = 0$, 则 $f(x)g(x)$ 在 $x = 0$ 处可导且导数为 0
 (D) 若 f, g 在 \mathbb{R} 上可导, 且 $f(0) = 0$, $g(0) = 3$, $f(1) = \ln 3$, $g(1) = 1$, 则存在 $a \in (0, 1)$ 使得 $f'(a)g(a) + g'(a) = 0$

6.2 2025 秋《高等微积分(1)》期中考试

例 6.2.1 (第1题)

(1) 计算极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}} \quad (6.2.1)$$

(2) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是奇函数, 且处处都有任意阶的高阶导数。证明: 对正偶数 n , 都有 $f^{(n)}(0) = 0$ 。解 (1) 答案为 $e^{-\frac{1}{2}}$ 。先算取对数后的极限式:

$$K = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)}{e^x - 1} \quad (6.2.2)$$

利用 $\frac{0}{0}$ 型的洛必达法则, 可得

$$\begin{aligned} K &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\ln(1+x)} \cdot \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

由此可得所求极限的值为 $e^K = e^{-\frac{1}{2}}$ 。

也可以用带 Peano 余项的 Taylor 公式计算:

$$K = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 - \frac{x}{2} + o(x) \right)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x}{2} + o(x)}{x + o(x)} = -\frac{1}{2} \quad (6.2.4)$$

(2) 由奇函数的定义可知, 对任何 x 都有 $f(-x) = -f(x)$ 。对此恒等式的两边求高阶导数, 利用链式法则, 可得

$$f'(-x)(-1) = -f'(x), \quad f''(-x)(-1)^2 = -f''(x), \quad \dots \quad (6.2.5)$$

依此下去, 直到 $f^{(n)}(-x)(-1)^n = -f^{(n)}(x)$ 。当 n 是正偶数时, 取 $x = 0$ 可得 $f^{(n)}(-0)(-1)^n = -f^{(n)}(0)$, 因而有 $f^{(n)}(0) = 0$ 。另外的证法: 利用导数的定义验证奇函数的导函数是偶函数、偶函数的导函数是奇函数。例如, 若 f 是奇函数, 则

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} = f'(x) \quad (6.2.6)$$

这样, 对正偶数 n , $f^{(n)}$ 是奇函数, 从而有 $f^{(n)}(0) = 0$ 。

也可以利用 Taylor 多项式:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n) \\ f(-x) &= a_0 - a_1x + a_2x^2 - \dots + (-1)^n a_nx^n + o(x^n) = -f(x) \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

由 Taylor 多项式的唯一性可知, $a_{2k} = -a_{2k} = 0$ ($k \in \mathbb{N}$), 故 $f^{(2k)}(0) = (2k)! a_{2k} = 0$. \square

常见错解

1. 误用连续性、乱用 L'Hôpital 法则:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{\times}{=} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x), \quad f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \stackrel{\times}{=} \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) \quad (6.2.8)$$

2. 记错展开式:

$$\ln(1+x) \stackrel{\times}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad \ln(1+x) \stackrel{\times}{=} x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad (6.2.9)$$

3. 计算出错、算完抄错数。

例 6.2.2 (第 2 题)

(1) 给定实数 t , 求数列极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n e^{-\sqrt{nt}} \right) \quad (6.2.10)$$

(2) 设实数序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到实数 L , 求如下极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} \right) \quad (6.2.11)$$

的值。要求用 ε - N 语言证明你的结论。

解 (1) 答案为 $e^{-\frac{t^2}{2}}$ 。先计算原式取对数之后的极限:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \ln \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right) - \sqrt{nt} \right) \quad (6.2.12)$$

考虑数列 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$, 它收敛到零且每项非零。利用 Heine 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \ln \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right) - \sqrt{nt} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \ln(1+tx) - \frac{t}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+tx) - tx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{1+tx} - t}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-t^2}{2(1+tx)} = -\frac{t^2}{2} \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

其中第三个等式使用了洛必达法则。这样, 所求极限为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n e^{-\sqrt{nt}} \right) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (6.2.14)$$

上述计算中, 也可使用带 Peano 余项的 Taylor 公式:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+tx) - tx}{x^2} = \frac{-\frac{1}{2}t^2x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{t^2}{2} \quad (6.2.15)$$

(2) 答案为 L 。对任何正数 ε ，由极限定义可知存在 $N \in \mathbb{N}^*$ ，使得对 $m > N$ 都有 $|a_m - L| < \varepsilon$ 。记 $K = \sum_{i=1}^N i|a_i - L|$ ，取正整数 $N_0 > N$ 使得 $K < \frac{N_0(N_0+1)}{2}$ ，则对 $n > N_0$ 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} - L \right| &= \frac{2}{n(n+1)} \left| \sum_{i=1}^n i(a_i - L) \right| \leq \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i|a_i - L| \\ &< \frac{2}{n(n+1)} \left(\sum_{i=1}^N i|a_i - L| + \sum_{i=N+1}^n i\varepsilon \right) < \frac{2}{n(n+1)} K + \varepsilon < 2\varepsilon \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

这表明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} \right) = L \quad (6.2.17)$$

也可以应用 Stolz 定理:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \quad (6.2.18)$$

随后再用 ε - N 语言证明 Stolz 定理即可。 \square

常见错解 第(1)问半数同学的答案是 1，原因为误用 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left[\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \right]^{\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{nt}}} \stackrel{\times}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{t\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{nt}}} = 1 \quad (6.2.19)$$

少部分同学 Taylor 展开错误，二阶项误写成 $+\frac{t^2}{2n}$, $\pm\frac{t^2}{n}$, $-\frac{t}{2n}$ ，余项误写成 $o(t^2)$:

$$\ln \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (6.2.20)$$

也有同学 Taylor 展开正确，但完全没管 o 的含义 ($o(\sqrt{n})$ 怎么能是 0 呢):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n \cdot e^{-t\sqrt{n}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) - t\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{t\sqrt{n} - t\sqrt{n} + o(t\sqrt{n})} \stackrel{\times}{=} e^0 \quad (6.2.21)$$

第(2)问主要有两种做法，直接放缩或证明 Stolz 定理，有个细节值得注意：首先 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists N > 0$ 使得 $n > N \implies |a_n - L| < \varepsilon$ ，然后

$$\left| \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} - L \right| \leq \frac{\sum_{k=1}^n k|a_k - L|}{\sum_{k=1}^n k} < \frac{\sum_{k=1}^N k|a_k - L|}{\sum_{k=1}^n k} + \frac{\sum_{k=N+1}^n k}{\sum_{k=1}^n k} \varepsilon \quad (6.2.22)$$

有同学直接令 $n \rightarrow +\infty$ 得到

$$\left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} - L \right| \leq \varepsilon \quad (6.2.23)$$

这是不妥当的，因为此时并不知道极限存在，不能直接取极限。类似的错误是，有同学为了消除第一项，注意到

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^N k|a_k - L|}{\sum_{k=1}^n k} = 0 \quad (6.2.24)$$

然后对不等式一半取极限, 一半不取, 这也是不妥当的:

$$\left| \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} - L \right| \leq 0 + \frac{\sum_{k=N+1}^n k}{\sum_{k=1}^n k} \varepsilon \leq \varepsilon \quad (6.2.25)$$

Stolz 定理的证明也出现了类似的不妥之处: 由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = A$ 得到 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ 使得

$$n \geq N \implies (A - \varepsilon)(x_{n+1} - x_n) < y_{n+1} - y_n < (A + \varepsilon)(x_{n+1} - x_n) \quad (6.2.26)$$

求和得到

$$(A - \varepsilon)(x_n - x_N) < y_n - y_N < (A + \varepsilon)(x_n - x_N) \quad (6.2.27)$$

同除以 x_n 可得

$$\frac{y_N - (A - \varepsilon)x_N}{x_n} - \varepsilon < \frac{y_n}{x_n} - A < \frac{y_N - (A + \varepsilon)x_N}{x_n} + \varepsilon \quad (6.2.28)$$

然后有同学在并未得到 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n}$ 存在的情况下取了极限, 得到

$$-\varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} - A \leq \varepsilon \quad (6.2.29)$$

这也是不妥当的。

例 6.2.3 (第 3 题)

(1) 设 f, g 都在 \mathbb{R} 上都有连续的二阶导函数, 且 f 有反函数 $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. 请用 f 与 g 的导数与高阶导数表示函数 $h(x) = g(f^{-1}(x))$ 的一阶导数与二阶导数 (假设 f 的导函数处处非零)。

(2) 摆线由参数方程 $\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$ 给出. 求 y 关于 x 的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 与二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

解 (1) 假设 f 的导函数处处非零, 则由反函数求导法则可得

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (6.2.30)$$

这样, 利用链式法则可得

$$h'(x) = g'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = \frac{g'(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))} \quad (6.2.31)$$

在此基础上, 利用 Leibniz 法则与链式法则可以进一步求导:

$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{\frac{d}{dx} g'(f^{-1}(x)) \cdot f'(f^{-1}(x)) - g'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f'(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^2} \\ &= \frac{\frac{g''(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))} \cdot f'(f^{-1}(x)) - g'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{f''(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))}}{(f'(f^{-1}(x)))^2} \\ &= \frac{g''(f^{-1}(x)) \cdot f'(f^{-1}(x)) - g'(f^{-1}(x)) \cdot f''(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^3} \end{aligned} \quad (6.2.32)$$

也可将上述结果记为

$$h' = \left(\frac{g'}{f'}\right) \circ f^{-1}, \quad h'' = \left(\frac{g''f' - g'f''}{(f')^3}\right) \circ f^{-1} \quad (6.2.33)$$

(2) 记 $f(t) = r(t - \sin t)$ 、 $g(t) = r(1 - \cos t)$, 则 y 关于 x 的函数关系为 $y = g(f^{-1}(x))$ 。记 $h = g \circ f^{-1}$ 、 $f^{-1}(x) = t$, 则利用 (1) 的计算结果, 可得一阶导数为

$$\frac{dy}{dx} = h'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{r \sin t}{r(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \quad (6.2.34)$$

二阶导数为

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} = h''(x) &= \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^3} \\ &= \frac{r \cos t \cdot r(1 - \cos t) - r \sin t \cdot (r \sin t)}{r^3(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{r(1 - \cos t)^2} \end{aligned} \quad (6.2.35)$$

□

例 6.2.4 (第4题)

定义函数 $f(x)$ 为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases} \quad (6.2.36)$$

已知 f 在 $x=0$ 处连续。

- (1) 求 A 的值。
- (2) 求 f 的导函数 $f'(x)$ 。
- (3) 证明 f 在 $x=0$ 处有二阶导数, 并求出 $f''(0)$ 的值。

解 (1) 所求 A 的值为 $-\frac{1}{2}$ 。利用洛必达法则可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2} \quad (6.2.37)$$

由于 f 在 $x=0$ 处连续, 可知 $A = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}$ 。上述计算中, 也可使用带 Peano 余项的 Taylor 公式:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} \quad (6.2.38)$$

(2) 在 $x \neq 0$ 处有

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+x} - 1\right)x^2 - (\ln(1+x) - x)2x}{x^4} = \frac{-\frac{x^2}{1+x} - 2\ln(1+x) + 2x}{x^3} \quad (6.2.39)$$

在 $x=0$ 处, 有

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} + \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{1+x} - 2\ln(1+x) + 2x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2x-x^2}{(1+x)^2} - \frac{2}{1+x} + 2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x)^2} = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (6.2.40)$$

上述计算中, 也可使用带 Peano 余项的 Taylor 公式:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} + \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x + o(x) + \frac{1}{2}}{x} = \frac{1}{3} \quad (6.2.41)$$

(3) 所求 $f''(0)$ 的值为 $-\frac{1}{2}$ 。 f 在 $x=0$ 处的二阶导定义为如下的极限式:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\frac{x^2}{1+x} - 2\ln(1+x) + 2x}{x^3} - \frac{1}{3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{1+x} - 2\ln(1+x) + 2x - \frac{1}{3}x^3}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2x-x^2}{(1+x)^2} - \frac{2}{1+x} + 2 - x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2-x}{4(1+x)^2} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (6.2.42)$$

上述计算中, 也可使用带 Peano 余项的 Taylor 公式:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{1+x} - 2\ln(1+x) + 2x - \frac{1}{3}x^3}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2(1-x+x^2+o(x^2)) - 2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) + 2x - \frac{1}{3}x^3}{x^4} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (6.2.43)$$

□

例 6.2.5 (第 5 题)

设 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足对任何正数 x 都有 $f''(x) > 0$ 。

(1) 证明: 对不同的正数 a, x , 有 $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$ 。

(2) 假设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。证明: 对任何正数 x 都有 $f(x) > 0$ 。

解 (1) 由于 f'' 恒正, 可得 f' 在 \mathbb{R} 上严格递增。利用 Lagrange 中值定理可知, 存在 ξ 严格介于 a, x 之间, 使得

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) \quad (6.2.44)$$

进而有如下的等式 (*) 成立:

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = (f'(\xi) - f'(a))(x-a) \quad (6.2.45)$$

当 $x > a$ 时, 有 $\xi > a$, 可得 $f'(\xi) - f'(a)$ 与 $x-a$ 都大于零; 当 $x < a$ 时, 有 $\xi < a$, 可得 $f'(\xi) - f'(a)$ 与 $x-a$ 都小于零。这样, 等式 (*) 的右边总大于零, 从而得证 (1) 中所述不等式。

或者考虑辅助函数 $g(x) = f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))$, 注意到 $g''(x) = f''(x) > 0$, 故 g' 严格增, 结合 $g'(a) = 0$ 可得 g' 在 $(0, a)$ 上为负、在 $(a, +\infty)$ 上为正, 从而 g 在 $(0, a)$ 上严格减、在 $(a, +\infty)$ 上严格增, 结合 $g(a) = 0$ 可得对任何 $x \neq a$ 都有 $g(x) > 0$, 即有 $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$ 。

也可采用带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 公式:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2 > f(a) + f'(a)(x - a), \quad \forall x \neq a \quad (6.2.46)$$

其中 ξ 介于 a, x 之间 (注意不能写成 $\xi \in (a, x)$)。

(2) 若存在正数 a 使得 $f'(a) > 0$, 由 (1) 的结论可知对 $x > a$ 有 $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$, 从而当 $x \rightarrow +\infty$ 时有 $f(x)$ 趋于 $+\infty$, 矛盾。这样, f' 处处非正, 得到 f 在 \mathbb{R}^+ 上 (非严格) 递减。对每个正数 b , 当 $x > b$ 时有 $f(b) \geq f(x)$, 取极限可得

$$f(b) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (6.2.47)$$

这表明 f 的值非负。若存在 $f(b) = 0$, 由 f 递减且取值非负, 可得 f 在 $[b, +\infty)$ 上恒等于零。进而可得 f'' 在 $[b, +\infty)$ 上恒等于零, 矛盾。所以 f 每点的值都是正的。

或者利用凸函数的割线定义得到相同的结论。假设 $\exists b > a > 0$ 使得 $f(b) > f(a)$, 由凸函数的定义可得

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \forall x > b \quad (6.2.48)$$

因此

$$f(x) > f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow +\infty \quad (6.2.49)$$

这与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 矛盾, 故 f 在 $(0, +\infty)$ 上单调不减, 从而

$$f(x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \forall x > 0 \quad (6.2.50)$$

假设 $\exists a > 0$ 使得 $f(a) = 0$, 取 $b > a$, 则有 $0 \leq f(b) \leq f(a) = 0$ 。 $\forall y \in (a, b)$, 由凸函数的定义可得

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0 \quad (6.2.51)$$

从而 $f(y) < f(a) = 0$, 矛盾。故 $f(x) > 0, \forall x > 0$ 。

也可直接利用反证法。假设 $\exists a > 0$ 使得 $f(a) < 0$, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 可知存在 $b > a$ 使得 $f(b) > \frac{1}{2}f(a)$, 由凸函数的定义可得

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = -\frac{f(a)}{2(b - a)}, \quad \forall x > b \quad (6.2.52)$$

因此

$$f(x) > f(b) - \frac{f(a)}{2(b - a)}(x - b) \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow +\infty \quad (6.2.53)$$

这与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 矛盾, 故 $f(x) \geq 0, \forall x > 0$ 。同上理可得 f 单调不减, 即 $\forall b > a$, 有 $f(b) \leq f(a)$ 。 $\forall x \in (a, b)$, 由凸函数的定义可得

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0 \implies f(x) > f(a) \geq 0 \quad (6.2.54)$$

综上, $f(x) > 0, \forall x > 0$ 。 □

常见错解 第(1)问部分同学采用带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式, 这是完全错误的, 因为无法得到 $o((x-a)^2)$ 的符号。

第(2)问最常见的错误是认为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 即便 f 严格单调, 这一命题同样不正确, 例如借助以下函数:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} - x, & n \leq x < n + \frac{1}{2^{n+2}} \\ \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{n+1-x}{2^{n+2}-1}, & n + \frac{1}{2^{n+2}} \leq x < n+1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \quad (6.2.55)$$

则

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & n < x < n + \frac{1}{2^{n+2}} \\ -\frac{1}{2^{n+2}-1}, & n + \frac{1}{2^{n+2}} < x < n+1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \quad (6.2.56)$$

添加光滑子 (mollifier) 使得 $f \in \mathcal{C}^\infty$ 即可。但如果借助 f' 严格增的条件, 则此命题正确, 可惜在考场上几乎没有同学想到这一点。

部分同学误用 L'Hôpital 法则:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \stackrel{\times}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad (6.2.57)$$

注意 L'Hôpital 法则是“导函数比值的极限存在, 则原函数比值的极限存在且相等”, 其逆命题不成立。

部分同学令(1)中的 $x \rightarrow +\infty$, 对极限的保号性理解有误, 得到 $f'(a) < 0$; 正确的结果应为:

$$f'(a) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \implies f'(a) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \quad (6.2.58)$$

部分同学误用 Fermat 定理, 认为可微函数在闭区间上的最值点处的导数为零。

部分同学在得到 $f'(x_1) < 0$ 时, 由“ f' 严格增”理所当然地认为 $\exists x_2 > x_1$ 使得 $f'(x_2) \geq 0$ 。

例 6.2.6 (第 6 题)

(1) 对可导函数 $f(x)$, 求 $\arctan f(x)$ 的导函数。

(2) 设 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上有连续的导函数, 满足 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ 、 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$, 且对任何 $x \in (a, b)$ 都有

$$f'(x) + f^2(x) \geq -1. \quad (6.2.59)$$

证明: $b - a \geq \pi$ 。

解 (1) 由链式法则可得

$$(\arctan f(x))' = \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} \quad (6.2.60)$$

(2) 令 $g(x) = x + \arctan f(x)$, 则对任何 $x \in (a, b)$ 有

$$g'(x) = 1 + \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} = \frac{f'(x) + f^2(x) + 1}{1 + f^2(x)} \geq 0 \quad (6.2.61)$$

这表明 $g(x)$ 在 (a, b) 上 (非严格) 递增。对 (a, b) 中的任何两点 $x < y$, 有 $g(x) \leq g(y)$ 。对 $x \rightarrow a^+$ 取极限, 得到

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) \leq g(y) \quad (6.2.62)$$

再对 $y \rightarrow b^-$ 取极限, 得到

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) \leq \lim_{y \rightarrow b^-} g(y) \quad (6.2.63)$$

结合题述条件, 上述不等式为 $a + \frac{\pi}{2} \leq b - \frac{\pi}{2}$, 即有 $b - a \geq \pi$ 。另外的解答: 由条件可得

$$(\arctan f(x))' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} \geq -1 \quad (6.2.64)$$

对区间 (a, b) 中任何两点 $x < y$, 由 Lagrange 中值定理可得存在 $\xi \in (x, y)$ 使得

$$\frac{\arctan f(y) - \arctan f(x)}{y - x} = (\arctan f(x))'|_{x=\xi} \geq -1 \quad (6.2.65)$$

即有 $y - x \geq \arctan f(x) - \arctan f(y)$ 。对 $x \rightarrow a^+$ 与 $y \rightarrow b^-$ 分别取极限得到

$$b - a \geq \lim_{x \rightarrow a^+} \arctan f(x) - \lim_{y \rightarrow b^-} \arctan f(y) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \quad (6.2.66)$$

□

例 6.2.7 (第7题)

- (1) 给定 $0 < a < 1$, 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是区间 $(0, 1)$ 中各项互异的数列, 且满足对任何正整数 n 都有 $\frac{x_{n+2}-x_n}{x_{n+1}-x_n} \in (a, 1)$ 。证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛。
- (2) 设 $c \in (0, \frac{3}{4})$, $x_1 \in (0, 1)$, 定义数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $x_{n+1} = 1 - cx_n^2$ 。已知 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中各项互异。证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求出其极限。

解 (1) 记 $\lambda_n = \frac{x_{n+2}-x_n}{x_{n+1}-x_n}$, 由 $\lambda_n \in (0, 1)$ 可知 x_{n+2} 严格介于 x_n, x_{n+1} 之间, 称此为性质 (*)。若 $x_1 > x_2$, 则由性质 (*) 可知 $x_2 < x_3$, 考虑数列 $\{x'_n = x_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 即可。这样, 可不妨设 $x_1 < x_2$, 反复利用性质 (*) 可知有

$$x_1 < x_3 < x_5 < \cdots, \quad x_2 > x_4 > x_6 > \cdots \quad (6.2.67)$$

利用单调收敛定理可知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n-1}$ 与 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n}$ 都存在, 分别记为 L, M 。由 $\lambda_n \in (a, 1)$ 可得

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |x_n + \lambda(x_{n+1} - x_n) - x_{n+1}| = (1 - \lambda)|x_{n+1} - x_n| \leq (1 - a)|x_{n+1} - x_n| \quad (6.2.68)$$

从而有 $|x_{n+1} - x_n| \leq (1 - a)^{n-1}|x_2 - x_1|$ 。特别地, 有 $|x_{2n+1} - x_{2n}| \leq (1 - a)^{2n-1}|x_2 - x_1|$ 。利用夹逼定理可得

$$|L - M| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{2n+1} - x_{2n}| = 0 \quad (6.2.69)$$

即有 $L = M$ 。这就证明了 x_n 都趋于同一个极限 L 。或由 $|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{a}|x_{n+2} - x_n|$, 令 $n \rightarrow +\infty$ 可得 $|L - M| = 0$, 即 $L = M$ 。

或者利用闭区间套定理, 令 K_n 为以 x_n, x_{n+1} 为端点的闭区间, 则 $K_{n+1} \subseteq K_n$, 构成有界闭区间套; 同时有

$$|K_{n+1}| = |x_{n+2} - x_{n+1}| = (1 - \lambda_n)|x_{n+1} - x_n| < (1 - a)|K_n| \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |K_n| = 0 \quad (6.2.70)$$

由闭区间套定理可知 $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ 为单点集 $\{A\}$, 从而数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A 。

也可利用压缩数列与 Cauchy 收敛准则。注意到 $|x_{n+2} - x_{n+1}| < (1 - a)|x_{n+1} - x_n|$, 由此可得

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \sum_{k=0}^{p-1} |x_{n+k+1} - x_{n+k}| \leq \sum_{k=0}^{p-1} (1 - a)^{k-1} |x_{n+1} - x_n| < \frac{(1 - a)^{n-1}}{a} |x_1 - x_0| \stackrel{?}{\leq} \varepsilon \quad (6.2.71)$$

取 $N \geq \log_{1-a} \frac{a\varepsilon}{|x_1 - x_0|} + 1$ 即可, 则 $\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}^+$, 都有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, 由 Cauchy 收敛准则可知数列 $\{x_n\}$ 收敛。

(2) 利用递推关系可知 x_n 都在 $(0, 1)$ 区间中, 且可直接计算得到

$$\frac{x_{n+2} - x_n}{x_{n+1} - x_n} = c^2 x_n^2 - cx_n + 1 - c \quad (6.2.72)$$

上述右边是关于 x_n 的二次函数

$$g(x) = c^2 x^2 - cx + 1 - c = \left(cx - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} - c \quad (6.2.73)$$

它在 $(0, 1)$ 上值满足

$$\frac{3}{4} - c \leq g(x) \leq \max\{g(0), g(1)\} = \max\{1 - c, (1 - c)^2\} = 1 - c < 1 \quad (6.2.74)$$

取 $0 < a < \frac{3}{4} - c$, 则 $\frac{x_{n+2} - x_n}{x_{n+1} - x_n} \in (a, 1)$, 利用 (1) 的结论可知数列 $\{x_n\}$ 收敛。

或者利用压缩数列。注意到

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - x_{n+1}| &= |1 - cx_{n+1}^2 - (1 - cx_n^2)| = c|x_n^2 - x_{n+1}^2| = c|x_n + x_{n+1}||x_n - x_{n+1}| \\ &= c\left|1 + x_n - cx_n^2\right||x_n - x_{n+1}| = \left|c + \frac{1}{4} - \left(cx_n - \frac{1}{2}\right)^2\right||x_n - x_{n+1}| \leq \left(c + \frac{1}{4}\right)|x_n - x_{n+1}| \end{aligned} \quad (6.2.75)$$

故 $\{x_n\}$ 为压缩数列, 利用 Cauchy 收敛准则可知数列 $\{x_n\}$ 收敛。

也可利用不动点法, 此方法的运算量较大。设 A 为 $A = 1 - cA^2$ 在 $(0, 1)$ 的解, 令 $y_n = x_n - A$, 则

$$y_{n+1} = 1 - cx_n^2 - (1 - cA^2) = -c(x_n - A)(x_n + A) = -c(y_n + 2A)y_n, \quad y_n \in (-A, 1 - A) \quad (6.2.76)$$

因此 $y_n y_{n+1} < 0$ 。可以尝试证明 $|y_{n+2}| < a|y_n|$, 由此得到奇偶项分别压缩的数列, 从而证明收敛性。或者注意到

$$x_{n+2} - x_n = 1 - cx_{n+1}^2 - x_n = (1 - c - cx_n + c^2 x_n^2)(1 - x_n - cx_n^2) \quad (6.2.77)$$

可以尝试证明

$$\begin{cases} x_n > A \implies A - x_n < x_{n+2} - x_n < 0 \implies A < x_{n+2} < x_n \\ x_n < A \implies A - x_n > x_{n+2} - x_n > 0 \implies A > x_{n+2} > x_n \end{cases} \quad (6.2.78)$$

下面来算极限。令 $f(x) = 1 - cx^2$ ，它在 $(0, 1)$ 上严格递减，且在 $(0, 1)$ 上唯一的不动点（满足 $f(x) = x$ 的点）为

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4c}}{2c} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4c}} \quad (6.2.79)$$

由 $\{x_n\}$ 互异，可知每项 $x_n \neq \alpha$ 。若 $x_n < \alpha$ ，则有 $x_{n+1} = f(x_n) > f(\alpha) = \alpha$ ；若 $x_n > \alpha$ ，则有 $x_{n+1} = f(x_n) < f(\alpha) = \alpha$ 。总有 α 介于 x_n, x_{n+1} 之间，从而有

$$|x_n - \alpha| < |x_n - x_{n+1}| \leq (1 - a)^{n-1} |x_2 - x_1| \quad (6.2.80)$$

利用夹逼定理可得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$ 。

极限的计算也可用另外更简单的办法：设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A$ ，对递推式取极限得到

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - cx_n^2) = 1 - cA^2 \quad (6.2.81)$$

结合 $A \geq 0$ 可得到

$$A = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4c}}{2c} \quad (6.2.82)$$

□

常见错解 第(1)问主要有三种方法，常见的错误有：

- 标答做法：在得到 L, M 后，不证明 $L = M$ 。
- 闭区间套：未证明闭区间的长度趋于零。
- 压缩数列：将 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$ 视作数列收敛的充分条件；过渡放缩 λ_n 为 $|\lambda_n| < 1$ ，导致后续无法操作；将 λ_n 视作常数处理。

第(2)问也主要有三种做法，常见的错误有：

- 标答做法：未发现此例的 λ_n 可约分并由二次函数表示；在最后判定时直接认为 $|\lambda_n| > 0$ 而不是一个正数，断言 $\exists a > 0$ 使得 $|\lambda_n| > a$ 而不作任何计算；一元二次方程的求根公式算错。
- 压缩数列：减弱到 < 1 ，导致无法继续操作。
- 不动点法：试图证明 $|y_{n+1}| < |y_n|$ ，然而这并不成立，只能证明奇偶项分别压缩。
- 随意使用条件导出不存在的结论，例如认为 $\{x_n\}$ 单调，或者“不妨设 $x_{n+1} > x_n$ ”导出 $\{x_n\}$ 单调。
- 没有目标地乱算一通，迷失在大量计算中。

第7次习题课 不定积分计算

2023年11月27日, 2024年11月21日, 2025年11月26日。本节对应微积分 A(1) 第8次习题课的内容。本节习题课建议搭配“积分接力赛”¹一同使用, 以提升学习效果。

7.1 知识点复习

7.1.1 原函数与不定积分

重要概念回顾

- (1) 原函数、不定积分、被积函数。
- (2) 斜率场、方向场、积分曲线。

重要定理回顾

- (1) 设 I 是区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 则 f 在 I 上有原函数。进一步地, $\forall x_0 \in I, \forall y_0 \in \mathbb{R}$, f 有唯一的原函数 F 满足 $F(x_0) = y_0$ 。
- (2) 设 I 是区间, F, G 都是 f 在 I 上的原函数, 则 $F - G$ 是常值函数, 从而

$$\int f(x) dx = \{F + C \mid C \in \mathbb{R}\} =: F(x) + C \quad (7.1.1)$$

7.1.2 不定积分的运算性质

重要定理回顾

- (1) **线性:** 设 F, G 分别是 f, g 在 I 上的原函数, 则 $\lambda F + \mu G$ 是 $\lambda f + \mu g$ 的原函数, 即

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx \quad (7.1.2)$$

¹ “积分接力赛” 道具卡片: [figure/07-integral-relay-race.pdf](#)

(2) **第一换元法**: 设 F 是 f 在 I 上的原函数, $g: J \rightarrow I$ 可微, 则 $F(g(x))$ 是 $f(g(x))g'(x)$ 在 J 上的原函数, 即

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du \Big|_{u=g(x)} = F(g(x)) + C \quad (7.1.3)$$

(3) **第二换元法**: 设 F 是 f 在 I 上的原函数, $g: J \rightarrow I$ 可微且可逆, G 是 $f(g(u))g'(u)$ 的原函数, 则

$$\int f(x) dx = \int f(g(u))g'(u) du \Big|_{u=g^{-1}(x)} = G(u) + C = G(g^{-1}(x)) + C \quad (7.1.4)$$

(4) **分部积分**: 设 $f, g \in \mathcal{C}^1$, 则

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \quad (7.1.5)$$

注 若等式两侧都有不定积分号, 例如 $\int h(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$, 这实际上表示 f, g, h 的原函数 F, G, H 满足: $\exists C \in \mathbb{R}$ 使得 $H(x) = F(x) + G(x) + C$ 。

7.1.3 有理函数的不定积分以及可转化为有理函数的不定积分

重要概念回顾

- (1) 有理函数: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 P, Q 都是多项式。
- (2) 最简分式: $\frac{1}{(x-a)^k}$ 、 $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$, 其中 $k \in \mathbb{N}^*$ 、 $p^2 < 4q$ 。

重要定理回顾

- (1) 任何实数系数有理函数都可表示为一个多项式与有限多个最简分式的线性组合, 其中最简分式的分母是原有理函数分母多项式的因子。
- (2) 任何实数系数有理函数的不定积分都是初等函数。

应用

- (1) 计算有理函数的不定积分, 关键是把有理函数分解为最简分式的线性组合。
- (2) **三角有理分式**: 形如 $\int R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ 的积分, 其中 R 是 (二元) 有理函数, 可以采用万能公式

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t = \tan \frac{\theta}{2} \quad (7.1.6)$$

换元得到

$$\int R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \quad (7.1.7)$$

(3) **正切有理分式**: 作为特例, 形如 $\int R(\tan x) dx$ 的积分, 可以采用 $t = \tan \theta$ 换元得到

$$\int R(\tan x) dx = \int \frac{R(t)}{1+t^2} dt \quad (7.1.8)$$

(4) **部分根式**: 例如

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx &= \int R(\cos \theta, \sin \theta)(-\sin \theta) d\theta, \quad \theta = \arccos x \\ &= \int R(\sin \theta, \cos \theta) \cos \theta d\theta, \quad \theta = \arcsin x \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{x^2+1}) dx &= \int R(\sinh t, \cosh t) \cosh t dt, \quad t = \sinh^{-1} x \\ &= \int R\left(\frac{t^2-1}{2t}, \frac{t^2+1}{2t}\right) \frac{t^2+1}{2t^2} dt, \quad x = \frac{t^2-1}{2t} \\ &= \int R(\tan t, \sec t) \sec^2 t dt, \quad x = \tan t \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{x^2-1}) dx &= \int R(\cosh t, \sinh t) \sinh t dt, \quad t = \cosh^{-1} x \\ &= \int R\left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{t^2-1}{2t}\right) \frac{t^2-1}{2t^2} dt, \quad x = \frac{t^2+1}{2t} \\ &= \int R(\sec t, \tan t) \sec t \tan t dt, \quad x = \sec t \end{aligned} \quad (7.1.11)$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{px+q}{rx+s}}\right) dx, \quad t = \sqrt[n]{\frac{px+q}{rx+s}} \quad (7.1.12)$$

(5) **有理曲线**: 对平面上的有理曲线 $\gamma: t \mapsto (x, y)$, 其中 x, y 是关于 t 的有理函数, 则对于有理函数 $R(x, y)$, 沿着曲线 γ 有

$$\int R(x, y) dx = \int R(x(t), y(t)) x'(t) dt \quad (7.1.13)$$

7.2 补充习题

7.2.1 有理函数的不定积分

例 7.2.1

计算以下不定积分:

(1) $\int \frac{1-x^2}{1+x^2} dx$	(6) $\int \frac{x-1}{x^2-4x+8} dx$	(11) $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx$
(2) $\int \frac{x}{3-x^2} dx$	(7) $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$	(12) $\int \frac{1}{1+x^3} dx$
(3) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$	(8) $\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx$	(13) $\int \frac{x^7}{(1-x^2)^5} dx$
(4) $\int \frac{x}{x^2+x-6} dx$	(9) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$	(14) $\int \frac{1}{x^4(2x^2-1)} dx$
(5) $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$	(10) $\int \frac{1}{x^4-1} dx$	(15) $\int \frac{1}{x(x^n+a)} dx$

解 (1) 线性、观察原函数

$$\int \frac{1-x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{2}{1+x^2} dx - \int dx = 2 \arctan x - x + C \quad (7.2.1)$$

(2) 凑微分

$$\int \frac{x}{3-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{3-x^2} d(x^2-3) = -\frac{1}{2} \ln|x^2-3| + C \quad (7.2.2)$$

(3) 凑微分

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{x^2+x+1} d(x^2+x+1) = \ln|x^2+x+1| + C \quad (7.2.3)$$

(4) 最简因式分解

$$\int \frac{x}{x^2+x-6} dx = \frac{1}{5} \int \left(\frac{3}{x-3} + \frac{2}{x+2} \right) dx = \frac{3}{5} \ln|x-3| + \frac{2}{5} \ln|x+2| + C \quad (7.2.4)$$

(5) 凑微分

$$\int \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x^3)^2+1} dx^3 = \frac{1}{3} \arctan x^3 + C \quad (7.2.5)$$

(6) 线性、换元

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2-4x+8} dx &= \int \frac{x-2}{(x-2)^2+4} dx + \int \frac{1}{(x-2)^2+4} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du + \frac{1}{2} \int \frac{1}{v^2+1} dv, \quad u = (x-2)^2+4, v = \frac{x-2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+8| + \arctan \frac{x-2}{2} + C \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

(7) 最简分式分解

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C \quad (7.2.7)$$

(8) 凑微分、线性

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx^2 = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \quad (7.2.8)$$

(9) 设

$$5x^2 - 6x + 1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Ex(x-2) \quad (7.2.9)$$

则

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx = \int \left[1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)} \right] dx = x + \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{E}{x-3} \right) dx \quad (7.2.10)$$

两边取 $x = 0$, 得到 $A = \frac{1}{6}$; 取 $x = 2$, 得到 $B = -\frac{9}{2}$; 取 $x = 3$, 得到 $E = \frac{28}{3}$ 。故

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx = x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x-2| + \frac{28}{3} \ln|x-3| + C \quad (7.2.11)$$

(10) 最简分式: 设

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + E(x^2-1) \quad (7.2.12)$$

则

$$\int \frac{1}{x^4-1} dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{E}{x^2+1} \right) dx \quad (7.2.13)$$

取 $x = i$, 得到 $E = -\frac{1}{2}$; 取 $x = 1$, 得到 $A = \frac{1}{4}$; 取 $x = -1$, 得到 $B = -\frac{1}{4}$ 或由偶函数知 $B = -A$ 。故

$$\int \frac{1}{x^4-1} dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C \quad (7.2.14)$$

(11) 设

$$x^4 = (x^2+1)(x^2+4) + A(x^2+4) + B(x^2+1) \quad (7.2.15)$$

则

$$\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \int \left(1 + \frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+4} \right) dx \quad (7.2.16)$$

取 $x = i$ 得到 $A = \frac{1}{3}$; 取 $x = 2i$ 得到 $B = -\frac{16}{3}$ 。故

$$\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = x + \frac{1}{3} \arctan x - \frac{8}{3} \arctan \frac{x}{2} + C \quad (7.2.17)$$

(12) 设

$$1 = A(x^2 - x + 1) + \left[B \left(x - \frac{1}{2} \right) + E \right] (x+1) \quad (7.2.18)$$

则

$$\int \frac{1}{x^3+1} dx = \int \left[\frac{A}{x+1} + \frac{B(x-\frac{1}{2})+E}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \right] dx \quad (7.2.19)$$

取 $x = -1$ 得到 $A = \frac{1}{3}$; 比较 x^2 的系数得到 $B = -A = -\frac{1}{3}$; 取 $x = 0$ 得到 $E = \frac{1}{2}$ 。故

$$\int \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \quad (7.2.20)$$

(13)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^7}{(1-x^2)^5} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{(1-y)^3}{y^5} dy, \quad y = 1-x^2 \\ &= \frac{4x^6 - 6x^4 + 4x^2 - 1}{8(x^2-1)^4} + C\end{aligned}\quad (7.2.21)$$

(14) 设

$$1 = (Ax^2 + B)(2x^2 - 1) + Ex^4(\sqrt{2}x + 1) + Fx^4(\sqrt{2}x - 1) \quad (7.2.22)$$

则

$$\int \frac{1}{x^4(2x^2-1)} dx = \int \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^4} + \frac{E}{\sqrt{2}x-1} + \frac{F}{\sqrt{2}x+1} \right) dx \quad (7.2.23)$$

取 $x=0$ 得到 $B=-1$; 取 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 得到 $E=2$; 取 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 得到, $F=-2$ (或由偶函数知 $F=-E$)。求二阶导可得并代入 $x=0$ 可得

$$0 = 2A(2x^2 - 1) + 4(Ax^2 + B) = -2A + 4B \implies A = 2B = -2 \quad (7.2.24)$$

故

$$\int \frac{1}{x^4(2x^2-1)} dx = \frac{2}{x} + \frac{1}{3x^3} + \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1} \right| + C \quad (7.2.25)$$

(15)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^n+a)} dx &= \int \frac{x^{n-1}}{x^n(x^n+a)} dx = \frac{1}{n} \int \frac{dy}{y(y+a)}, \quad y = x^n \\ &= \frac{1}{na} \ln \left| \frac{x^n}{x^n+a} \right| + C\end{aligned}\quad (7.2.26)$$

□

7.2.2 三角函数的不定积分

例 7.2.2

计算以下不定积分:

(1) $\int (1 - 2 \cot^2 x) dx$	(8) $\int \sqrt{1 + \cos x} dx$	(15) $\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$
(2) $\int \tan x dx$	(9) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^4 x} dx$	(16) $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$
(3) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 + \tan x}} dx$	(10) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} dx$	(17) $\int \frac{1}{5 + 4 \sin x} dx$
(4) $\int \cos^2(1 - 2x) dx$	(11) $\int \frac{1}{\sin x \cos^4 x} dx$	(18) $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$
(5) $\int \cos^3 x dx$	(12) $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx$	(19) $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$
(6) $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$	(13) $\int \frac{1 + \tan x}{\sin 2x} dx$	(20) $\int \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} dx, x \in (0, \pi)$
(7) $\int \tan^4 x dx$	(14) $\int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx$	(21) $\int \sqrt{1 + \csc x} dx$

解 情况一: 利用三角函数二倍角公式、积化和差等降次, 用三角函数的平方关系化简。

$$(4) \quad \int \cos^2(1 - 2x) dx = \int \frac{\cos(2 - 4x) + 1}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(2 - 4x) + C \quad (7.2.27)$$

(6) 设 $\alpha^2 \neq \beta^2$, 则

$$\begin{aligned} \int \sin \alpha x \cos \beta x dx &= \int \frac{\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x}{2} dx \\ &= -\frac{\cos(\alpha + \beta)x}{2(\alpha + \beta)} - \frac{\cos(\alpha - \beta)x}{2(\alpha - \beta)} + C \end{aligned} \quad (7.2.28)$$

(8) 设 $x \in [-\pi, \pi]$, 则

$$\int \sqrt{1 + \cos x} dx = \int \sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = 2\sqrt{2} \int \cos \frac{x}{2} d\frac{x}{2} = 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + C \quad (7.2.29)$$

情况二: $\int f(\tan x) dx$, $t = \tan x$ 。

$$(1) \quad \int (1 - 2 \cot^2 x) dx = \int \left(1 - \frac{2}{t^2}\right) \frac{dt}{1 + t^2} = 3x + 2 \cot x + C \quad (7.2.30)$$

$$(2) \quad \int \tan x dx = \int t \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2} \ln(1 + \tan^2 x) + C \quad (7.2.31)$$

$$\begin{aligned} (2') \quad \int \tan x dx &= -\int \frac{-\sin x dx}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C \\ \int \tan x dx &= \int \frac{\sec x \tan x dx}{\sec x} = \ln |\sec x| + C \end{aligned} \quad (7.2.32)$$

$$(3) \quad \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 + \tan x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+t}} d(t+1) = 2\sqrt{1+\tan x} + C \quad (7.2.33)$$

$$(7) \quad \int \tan^4 x dx = \int t^4 \frac{dt}{1+t^2} = x - \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C \quad (7.2.34)$$

$$(12) \quad \begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{2\sin^2 x + \cos^2 x} dx = \int \frac{t^2}{2t^2 + 1} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C \end{aligned} \quad (7.2.35)$$

$$(13) \quad \int \frac{1 + \tan x}{\sin 2x} dx = \int \frac{1 + \tan x}{2 \tan x} d \tan x = \int \frac{1+t}{2t} dt = \frac{1}{2} \tan x + \frac{1}{2} \ln |\tan x| + C \quad (7.2.36)$$

$$(14) \quad \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx = \int \frac{1-t}{1+t} \frac{dt}{1+t^2} = \ln |\cos x| + \ln |1 + \tan x| + C \quad (7.2.37)$$

$$(14') \quad \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \ln |\sin x + \cos x| + C \quad (7.2.38)$$

$$(16) \quad \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{1}{\tan x + 1} dx = \int \frac{1}{1+t} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + C \quad (7.2.39)$$

$$(18) \quad \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\tan x}{\tan x + 1} dx = \int \frac{t}{1+t} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + C \quad (7.2.40)$$

$$(16') \quad (18') \quad \begin{aligned} (16) - (18) &= \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \ln |\sin x + \cos x| + C \\ (16) + (18) &= \int dx = x + C \end{aligned} \quad (7.2.41)$$

情况三: $\int f(\sin x) \cos x dx$, $\int f(\cos x) \sin x dx$.

$$(5) \quad \int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) d \sin x = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C \quad (7.2.42)$$

$$(9) \quad \text{令 } t = \sin x, \text{ 则} \quad \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^4 x} dx = \int \frac{d(t^2)}{1+t^4} = \arctan(\sin^2 x) + C \quad (7.2.43)$$

(10) 令 $t = \sin x$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} d \sin x = \int \frac{t^4}{(1-t^2)^2} dt \\ &= \frac{3}{4} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x} + \frac{3}{2} \sec x \tan x - \sin x \tan^2 x + C \end{aligned} \quad (7.2.44)$$

(11) 令 $t = \cos x$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x \cos^4 x} dx &= - \int \frac{d \cos x}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \frac{-1}{(1-t^2)t^4} dt \\ &= \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \sec x + \frac{1}{3} \sec^3 x + C \end{aligned} \quad (7.2.45)$$

(15) 令 $t = \cos x$, 则

$$\int \frac{1}{(2+\cos x) \sin x} dx = - \int \frac{dt}{(2+t)(1-t^2)} = \frac{1}{6} \ln \frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3} + C \quad (7.2.46)$$

(19) 令 $t = \cos x$, 则

$$\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx = - \int \frac{t^3}{1+t^2} dt = -\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} \ln(3+\cos 2x) + C \quad (7.2.47)$$

(20) 令 $t = \cos x$, 则

$$\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} dx = - \int \frac{\sqrt{1+t}}{1-t^2} dt = \sqrt{2} \ln \left| \tan \frac{x}{4} \right| + C \quad (7.2.48)$$

情况四: 万能公式。令 $t = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ 。

(17)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{5+4 \sin x} dx &= \int \frac{1}{5+4 \frac{2t}{1+t^2}} d(2 \arctan t) = \int \frac{2}{5+5t^2+8t} dt \\ &= \frac{2}{3} \arctan \frac{4+5 \tan \frac{x}{2}}{3} + C \end{aligned} \quad (7.2.49)$$

(21)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+\csc x} dx &= \int \sqrt{1+\frac{1+t^2}{2t}} d(2 \arctan t) = \int \frac{t+1}{\sqrt{2t}} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= -2 \arctan \frac{\cot x}{\sqrt{1+\csc x}} + C \end{aligned} \quad (7.2.50)$$

□

7.2.3 无理式的不定积分

例 7.2.3

计算以下不定积分:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx & (6) \int \frac{x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx & (11) \int x\sqrt{x^4+2x^2-1} dx \\
 (2) \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx & (7) \int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx & (12) \int x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \\
 (3) \int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}} dx & (8) \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx & (13) \int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}} dx \\
 (4) \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx & (9) \int x\sqrt{x+2} dx & (14) \int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx \\
 (5) \int \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+4x+5}} dx & (10) \int x^2\sqrt{1-x^2} dx & (15) \int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} dx
 \end{array}$$

解 (1) 解法一: 三角换元 $x = a \tan t$. 设

$$u^2 = A(1-u)(1+u)^2 + A(1+u)(1-u)^2 + B(1+u)^2 + B(1-u)^2 \quad (7.2.51)$$

则

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx &= \int \frac{a^2 \tan^2 t}{\frac{a}{\cos t}} \frac{a}{\cos^2 t} dt = a^2 \int \frac{\sin^2 t}{(1-\sin^2 t)^2} d \sin t \\
 &= a^2 \int \left[\frac{A}{1-u} + \frac{A}{1+u} + \frac{B}{(1-u)^2} + \frac{B}{(1+u)^2} \right] du, \quad u = \sin t
 \end{aligned} \quad (7.2.52)$$

取 $u = 1$ 得到 $B = \frac{1}{4}$, 取 $u = 0$ 得到 $A = -B = -\frac{1}{4}$, 所以

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx &= \frac{a^2}{4} \ln \frac{1-u}{1+u} + \frac{a^2}{2} \frac{u}{1-u^2} + C \\
 &= \frac{a^2}{4} \ln \frac{1-\sin t}{1+\sin t} + \frac{a^2}{2} \frac{\sin t}{\cos^2 t} + C \\
 &= \frac{a^2}{4} \ln \frac{\sqrt{x^2+a^2}-x}{\sqrt{x^2+a^2}+x} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+a^2} + C \\
 &= \frac{1}{2} x \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln (\sqrt{a^2+x^2}-x) + C
 \end{aligned} \quad (7.2.53)$$

解法二: 双曲函数换元 $x = a \sinh t$, 则

$$\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} = e^t, \quad \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} - \frac{x}{a} = e^{-t} \quad (7.2.54)$$

故有

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx &= \int \frac{a^2 \sinh^2 t}{a \cosh t} a \cosh t dt \\
 &= a^2 \int \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2 dt = \frac{a^2}{4} \int (e^{2t} + e^{-2t} - 2) dt \\
 &= \frac{a^2}{4} \left[\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} - 2t \right] + C
 \end{aligned} \quad (7.2.55)$$

其中

$$e^{2t} - e^{-2t} = \left(\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right)^2 - \left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} - \frac{x}{a} \right)^2 = \frac{2}{a^2} x \sqrt{x^2 + a^2} \quad (7.2.56)$$

$$-t = \ln \left(\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{x}{a} \right) - \ln a \quad (7.2.57)$$

解法三：双曲有理换元 $x = \frac{2at}{1-t^2}$ ，则

$$t = \frac{-a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x}, \quad \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2t^2}{(1-t^2)^2}} = a \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad (7.2.58)$$

故有

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \int \frac{4a^2t^2}{(1-t^2)^2} \cdot \frac{1-t^2}{a(1+t^2)} d \frac{2at}{1-t^2} = 8a^2 \int \frac{t^2}{(1-t^2)^3} dt \quad (7.2.59)$$

(2) 令 $t = \sqrt{x^2 - 4}$ ，则

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} \int \frac{t}{t^2 + 4} d(t^2 + 4) \\ &= \sqrt{x^2 - 4} - 2 \arctan \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} + C \end{aligned} \quad (7.2.60)$$

(3) 令 $t = \sqrt{a^2 - x^2}$ ，则

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(a^2 - t^2)}{(a^2 - t^2)t} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} + C \quad (7.2.61)$$

(4) 解法一：三角换元 $x = \sec t$ ， $0 \leq t \leq \pi$ 且 $t \neq \frac{\pi}{2}$ ，则

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{\cos^2 t}{\tan t} d \frac{1}{\cos t} = \int \cos t dt = \sin t + C = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + C \quad (7.2.62)$$

解法二：双曲换元 $x = \cosh t$ ，则

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cosh^2 t \sinh t} d \cosh t &= \int \frac{1}{\cosh^2 t} dt = \int \frac{4}{e^{2t} + e^{-2t} + 2} dt \\ &= \int \frac{2}{u^2 + 2u + 1} du, \quad u = e^{2t} \\ &= -\frac{2}{u + 1} + C \end{aligned} \quad (7.2.63)$$

(5)

$$\int \frac{2x - 1}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 + 4x + 5} + \ln \left(\sqrt{4x^2 + 4x + 5} - 2x - 1 \right) + C \quad (7.2.64)$$

(6)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} dx = -\frac{1}{2}(x + 3)\sqrt{-x^2 + 2x + 3} - 6 \tan^{-1} \frac{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}{x + 1} + C \quad (7.2.65)$$

(7)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})} dx = 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C \quad (7.2.66)$$

(8)

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} dx = \frac{1}{2} [x^2 - \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}x - 2 \log(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}) - 1] + C \quad (7.2.67)$$

(9)

$$\int x\sqrt{x+2} dx = \frac{2}{15}(x+2)^{3/2}(3x-4) + C \quad (7.2.68)$$

(10)

$$\int x^2\sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{8} \left[x\sqrt{1-x^2}(2x^2-1) - 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} \right] + C \quad (7.2.69)$$

(11)

$$\int x\sqrt{x^4+2x^2-1} dx = \frac{1}{4}(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2-1} - \tanh^{-1} \frac{\sqrt{x^4+2x^2-1}}{x^2+\sqrt{2}+1} + C \quad (7.2.70)$$

(12)

$$\int x\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}(x^2+x-2) - 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x}} + C \quad (7.2.71)$$

(13)

$$\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}} dx = \sqrt{(a-x)(x-b)} + (a-b) \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-b}{a-x}} + C \quad (7.2.72)$$

(14)

$$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{-x^2+x+1}} dx = \frac{1}{4} \left[(1-2x)\sqrt{-x^2+x+1} + 11 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+1}-1} \right] + C \quad (7.2.73)$$

(15)

$$\int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C \quad (7.2.74)$$

□

7.2.4 换元法和分部积分

例 7.2.4

计算以下不定积分:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x} dx & (5) \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx & (8) \int \tanh x dx \\
 (2) \int \frac{1}{x^2} \sinh \frac{1}{x} dx & (6) \int \frac{2^x}{\sqrt{4-4^{x+1}}} dx & (9) \int \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} dx \\
 (3) \int x \sec^2(1-x^2) dx & (7) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx & (10) \int \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x} dx \\
 (4) \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sin \sqrt{1+x^2} dx & &
 \end{array}$$

解 (1)

$$\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x} dx = \int \frac{1}{\arctan x} d\arctan x = \ln \arctan x + C \quad (7.2.75)$$

(2)

$$\int \frac{1}{x^2} \sinh \frac{1}{x} dx = - \int d \cosh \frac{1}{x} = - \cosh \frac{1}{x} + C \quad (7.2.76)$$

(3)

$$\int x \sec^2(1-x^2) dx = -\frac{1}{2} \int \sec^2 u du = \tan(1-x^2) + C \quad (7.2.77)$$

(4)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sin \sqrt{1+x^2} dx = -\cos \sqrt{1+x^2} + C \quad (7.2.78)$$

(5)

$$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx = \frac{2}{3} (\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + C \quad (7.2.79)$$

(6)

$$\int \frac{2^x}{\sqrt{4-4^{x+1}}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} d \frac{\ln u}{\ln 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \arcsin(2^x) + C \quad (7.2.80)$$

(7)

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \arctan(e^x) + C \quad (7.2.81)$$

(8)

$$\int \tanh x dx = \int \frac{d \cosh x}{\cosh x} = \ln \cosh x + C \quad (7.2.82)$$

(9)

$$\int \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x \ln \ln x} d \ln x = \ln \ln \ln x + C \quad (7.2.83)$$

(10)

$$\int \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x} dx = -\frac{2}{3}(1-\ln x)^{\frac{3}{2}} + C \quad (7.2.84)$$

□

例 7.2.5

计算以下不定积分:

(1) $\int x \cos 2x dx$

(5) $\int x \ln(x-1) dx$

(9) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

(2) $\int x e^{-3x} dx$

(6) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

(10) $\int e^x \sin^2 x dx$

(3) $\int x^2 \sin^2 x dx$

(7) $\int \arccos^2 x dx$

(11) $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$

(4) $\int x \arctan x dx$

(8) $\int x \tan^2 x dx$

(12) $\int \sin(\ln x) dx$

解 (1)

$$\int x \cos 2x dx = (A_1 x + A_2) \cos 2x + (B_1 x + B_2) \sin 2x + C \quad (7.2.85)$$

两边求导得到

$$x \cos 2x = A_1 \cos 2x - 2(A_1 x + A_2) \sin 2x + B_1 \sin 2x + 2(B_1 x + B_2) \cos 2x \quad (7.2.86)$$

比较系数得到

$$B_1 = \frac{1}{2}, \quad A_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad A_2 = \frac{1}{4} \quad (7.2.87)$$

因此

$$\int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C \quad (7.2.88)$$

(2)

$$\int x e^{-3x} dx = (Ax + B)e^{-3x} + C \quad (7.2.89)$$

两边求导得到

$$x e^{-3x} = e^{-3x}(-3Ax - 3B + A) \quad (7.2.90)$$

比较系数得到

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{9} \quad (7.2.91)$$

所以

$$\int x e^{-3x} dx = -\frac{3x+1}{9} e^{-3x} + C \quad (7.2.92)$$

(3)

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin^2 x dx &= \int \frac{x^2(1-\cos 2x)}{2} dx \\ &= \frac{x^3}{6} + (A_1 x^2 + A_2 x + A_3) \cos 2x + (B_1 x^2 + B_2 x + B_3) \sin 2x + C \end{aligned} \quad (7.2.93)$$

求导得

$$x^2 \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{x^2}{2} + (2A_1x + A_2 + 2B_1x^2 + 2B_2x + 2B_3) \cos 2x \\ + (-2A_1x^2 - 2A_2x - 2A_3 + 2B_1x + B_2) \sin 2x \quad (7.2.94)$$

比较系数得到

$$B_1 = A_2 = -\frac{1}{4}, \quad B_3 = \frac{1}{8} \quad A_1 = B_2 = A_3 = 0 \quad (7.2.95)$$

因此

$$\int x^2 \sin^2 x \, dx = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{4}x \cos 2x + \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}\right) \sin 2x + C \quad (7.2.96)$$

(4)

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{x^2 \arctan x}{2} - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} \, dx \\ = \frac{x^2 \arctan x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + C \quad (7.2.97)$$

(5)

$$\int x \ln(x-1) \, dx = \frac{x^2 \ln(x-1)}{2} - \int \frac{x^2}{2(x-1)} \, dx \quad (7.2.98)$$

(6) 令 $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t$, 则

$$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx = \int \ln\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} + \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) d\frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ = \int t \, d \sinh t = t \sinh t - \cosh t + C \\ = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C \quad (7.2.99)$$

(7)

$$\int (\arccos x)^2 \, dx = \int t^2 \, d \cos t = (A_1 t^2 + A_2 t + A_3) \cos t + (B_1 t^2 + B_2 t + B_3) \sin t + C \quad (7.2.100)$$

求导得

$$-t^2 \sin t = (2A_1 t + A_2 + B_1 t^2 + B_2 t + B_3) \cos t + (2B_1 t + B_2 - A_1 t^2 - A_2 t - A_3) \sin t \quad (7.2.101)$$

比较系数得到

$$B_1 = A_2 = B_3 = 0, \quad A_1 = 1, B_2 = A_3 = -2 \quad (7.2.102)$$

因此

$$\int (\arccos x)^2 \, dx = (t^2 - 2) \cos t - 2t \sin t + C \\ = [(\arccos x)^2 - 2] x - 2\sqrt{1-x^2} \arccos x + C \quad (7.2.103)$$

(8)

$$\int x \tan^2 x \, dx = -\frac{x^2}{2} + x \tan x + \ln |\cos x| + C \quad (7.2.104)$$

$$(9) \quad \int \frac{x}{\sin^2(x)} dx = \ln |\sin x| - x \cot x + C \quad (7.2.105)$$

$$(10) \quad \int e^x \sin^2 x dx = e^x (A_1 + A_2 \sin 2x + A_3 \cos 2x) + C \quad (7.2.106)$$

求导得到

$$e^x \sin^2 x = \frac{e^x(1 - \cos 2x)}{2} = e^x (A_1 + A_2 \sin 2x + A_3 \cos 2x + 2A_2 \cos 2x - 2A_3 \sin 2x) \quad (7.2.107)$$

比较系数得到

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 - 2A_3 = 0, \quad A_3 + 2A_2 = -\frac{1}{2} \quad (7.2.108)$$

因此

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = -\frac{1}{5}, \quad A_3 = -\frac{1}{10} \quad (7.2.109)$$

亦即

$$\int e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{5}e^x \sin 2x - \frac{1}{10}e^x \cos 2x + C \quad (7.2.110)$$

$$(11) \quad \int \frac{\sin^{-1} e^x}{e^x} dx = -e^{-x} \sin^{-1} e^x - \tanh^{-1} \sqrt{1 - e^{2x}} + C \quad (7.2.111)$$

$$(12) \quad \int \sin(\ln x) dx = -\frac{1}{2}x[\cos(\ln x) - \sin(\ln x)] + C \quad (7.2.112)$$

□

7.2.5 杂题

例 7.2.6

以下函数是否存在原函数？若存在，求它的不定积分。

$$(1) f(x) = |(x-1)(3x-2)|$$

$$(2) \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} -\cos \frac{1}{x} + 2x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

解 (1) 存在, 设

$$F(x) := C + \begin{cases} 2x - \frac{5}{2}x^2 + x^3, & x \in (-\infty, \frac{2}{3}] \\ -2x + \frac{5}{2}x^2 - x^3 + \frac{28}{27}, & x \in (\frac{2}{3}, 1) \\ 2x - \frac{5}{2}x^2 + x^3 + \frac{1}{27}, & x \in [1, +\infty) \end{cases} \quad (7.2.113)$$

验证可知 $F'(x) = f(x)$ 。

(2) 不存在, 因为导函数不存在第一类间断点。

(3) 存在, 设

$$F(x) := C + \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (7.2.114)$$

验证可知 $F'(x) = f(x)$ 。

□

7.3 讲义习题

7.3.1 不定积分的运算性质

例 7.3.1 (习题 6.2.1 节选)

计算以下不定积分:

(1) $\int x\sqrt{x\sqrt{x}} dx$

(3) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$

(4) $\int \sqrt{1 + \cos 2x} dx$

解 (1)

$$\int x\sqrt{x\sqrt{x}} dx = \int x^{7/4} dx = \frac{4}{11} x^{11/4} + C \quad (7.3.1)$$

(2)

$$\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx = - \int \cos \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin \frac{1}{x} + C \quad (7.3.2)$$

(3)

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{d(e^x)}{e^{2x} + 1} = \arctan(e^x) + C \quad (7.3.3)$$

(4) 设 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 则

$$\int \sqrt{1 + \cos 2x} dx = \int \sqrt{2} \cos x dx = \sqrt{2} \sin x + C \quad (7.3.4)$$

$$(5) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \stackrel{x=\tan t}{=} \int \sec t dt = \ln |\sec t + \tan t| + C = \ln (x + \sqrt{1+x^2}) + C \quad (7.3.5)$$

□

例 7.3.2 (习题 6.2.2 节选)

计算以下不定积分, 其中 n 是正整数, $a, b, \alpha, \beta, \lambda$ 都是非零实数:

$$\begin{array}{lll} (1) \int e^{\lambda x} \sin x dx & (3) \int \tan x dx & (5) \int x^4 \ln^2 x dx \\ (2) \int \sin \alpha x \cos \beta x dx & (4) \int \frac{\sin x dx}{a \sin x + b \cos x}, \int \frac{\cos x dx}{a \sin x + b \cos x} & (6) \int \sin(\ln x) dx \end{array}$$

解 (1) 设 $[e^{\lambda x}(A \sin x + B \cos x)]' = e^{\lambda x} \sin x$, 则

$$e^{\lambda x} \sin x = e^{\lambda x}[(\lambda A - B) \sin x + (A + \lambda B) \cos x] \implies A = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}, B = -\frac{1}{\lambda^2 + 1} \quad (7.3.6)$$

因此

$$\int e^{\lambda x} \sin x dx = \frac{e^{\lambda x}(\lambda \sin x - \cos x)}{\lambda^2 + 1} + C \quad (7.3.7)$$

(2) 设 $\alpha^2 \neq \beta^2$, 则

$$\begin{aligned} \int \sin \alpha x \cos \beta x dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x] dx \\ &= -\frac{\cos(\alpha + \beta)x}{2(\alpha + \beta)} - \frac{\cos(\alpha - \beta)x}{2(\alpha - \beta)} + C \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

(3)

$$\int \tan x dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C \quad (7.3.9)$$

(4) 设第一、二个被积函数的原函数分别为 F_1, F_2 , 则

$$\begin{aligned} aF_1 + bF_2 &= \int dx = x + C_1, \\ -bF_1 + aF_2 &= \int \frac{a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x} dx = \ln |a \sin x + b \cos x| + C_2 \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

因此

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x dx}{a \sin x + b \cos x} &= \frac{ax - b \ln |a \sin x + b \cos x|}{a^2 + b^2} + C \\ \int \frac{\cos x dx}{a \sin x + b \cos x} &= \frac{bx + a \ln |a \sin x + b \cos x|}{a^2 + b^2} + C \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

(5)

$$\int x^4 \ln^2 x dx = \frac{1}{5} x^5 \ln^2 x - \frac{2}{5} \int x^4 \ln x dx = \frac{1}{5} x^5 \ln^2 x - \frac{2}{25} x^5 \ln x + \frac{2}{125} x^5 + C \quad (7.3.12)$$

$$(6) \quad \int \sin(\ln x) dx \stackrel{x=e^t}{=} \int e^t \sin t dt = \frac{1}{2}x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C \quad (7.3.13)$$

□

7.3.2 有理函数的不定积分以及可转化为有理函数的不定积分

例 7.3.3 (习题 6.3.4 节选)

计算以下不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2} dx$	(6) $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$	(11) $\int \frac{dx}{3+2\sin x}$
(2) $\int \frac{x^3}{(1-x^2)^3} dx$	(7) $\int x^3\sqrt{1-x^2} dx$	(12) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$
(3) $\int \sqrt[3]{\frac{x+3}{1-x}} dx$	(8) $\int \frac{dx}{\cos^3 x} dx$	(13) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$
(4) $\int \sqrt{1+x^2} dx$	(9) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$	(14) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$
(5) $\int \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}} dx$	(10) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$	

解 (1) 设

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{E}{1+x^2} + \frac{F}{(1+x^2)^2} \implies 1 = A(1+x^2)^2 + Ex^2(1+x^2) + Fx^2 \quad (7.3.14)$$

令 $x=0$ 可得 $A=1$, 令 $x=i$ 可得 $F=-1$ 。等式两边同时求导并代入 $x=i$ 可得

$$0 = 0 + 0 + 2Ex^3 + 2Fx \implies E = F = -1 \quad (7.3.15)$$

因此

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2} = -\frac{1}{x} - \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{3}{2} \arctan x + C \quad (7.3.16)$$

其中

$$\begin{aligned} I_n &:= \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}) \\ &\implies I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n \end{aligned} \quad (7.3.17)$$

(2) 设

$$\frac{x^3}{(1-x^2)^3} = \frac{Ax}{1-x^2} + \frac{Bx}{(1-x^2)^2} + \frac{Dx}{(1-x^2)^3} \implies x^2 = A(1-x^2)^2 + B(1-x^2) + D \quad (7.3.18)$$

令 $x=1$ 可得 $D=1$ 。等式两边同时求导可得

$$2x = -4Ax(1-x^2) - 2Bx \implies A=0, B=-1 \quad (7.3.19)$$

因此

$$\int \frac{x^3}{(1-x^2)^3} dx = -\frac{1}{2(1-x^2)} + \frac{1}{4(1-x^2)^2} + x + C \quad (7.3.20)$$

(3) 令 $t = \sqrt[3]{\frac{x+3}{1-x}}$, 则 $x = \frac{t^3-3}{t^3+1}$, $dx = \frac{12t^2}{(1+t^3)^2} dt$, 此时

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{\frac{x+3}{1-x}} dx &= 12 \int \frac{t^3 dt}{(1+t^3)^2} = -\frac{4t}{1+t^3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} \ln \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} + C \\ &= (x-1) \sqrt[3]{\frac{x+3}{1-x}} + \frac{4\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2\sqrt[3]{\frac{x+3}{1-x}}-1}{\sqrt{3}} + 2 \ln \left(1 + \sqrt[3]{\frac{x+3}{1-x}} \right) + \frac{2}{3} \ln(1-x) + C \end{aligned} \quad (7.3.21)$$

$$(4) \quad \int \sqrt{1+x^2} dx \stackrel{x=\tan t}{=} \int \sec^3 t dt = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1+x^2} + \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \right] + C \quad (7.3.22)$$

$$(5) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx \stackrel{x=t^6}{=} \int \frac{6t^5}{t^3+t^2} dt = 6\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - 6 \ln(1 + \sqrt[6]{x}) + C \quad (7.3.23)$$

(6) 令 $t = x+1$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx &= \int \frac{t^2+1-3t+2}{\sqrt{t^2+1}} dt = \int \sqrt{1+t^2} dt + \int \frac{2dt}{\sqrt{1+t^2}} - 3\sqrt{1+t^2} \\ &= \frac{1}{2} \left[t\sqrt{1+t^2} + \ln \left(t + \sqrt{1+t^2} \right) \right] + 2 \ln \left(t + \sqrt{1+t^2} \right) - 3\sqrt{1+t^2} + C \\ &= \frac{1}{2} (x+1) \sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2} \ln \left(x+1 + \sqrt{x^2+2x+2} \right) - 3\sqrt{x^2+2x+2} + C \end{aligned} \quad (7.3.24)$$

(7) 令 $x = \sin t$, $u = \cos t = \sqrt{1-x^2}$, 则

$$\int x^3 \sqrt{1-x^2} dx = \int \sin^3 t \cos^2 t dt = \int (u^2-1)u^2 du = \frac{1}{5} (1-x^2)^{5/2} - \frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} + C \quad (7.3.25)$$

$$\begin{aligned} (8) \quad \int \sec^3 x dx &= \int \sec x d(\tan x) = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\ &= \sec x \tan x + \int \sec x dx - \int \sec^3 x dx \\ &= \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C \end{aligned} \quad (7.3.26)$$

(9) 令 $t = \cos x$, 则

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx = - \int \frac{(1-t^2)^2 dt}{t^4} = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C \quad (7.3.27)$$

(10) 令 $t = \sqrt[3]{1+x^5}$, 则 $\frac{dx}{x} = \frac{5x^4 dx}{5x^5} = \frac{3t^2 dt}{5(t^3-1)}$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1+x^5}} = \frac{3}{5} \int \frac{t dt}{t^3-1} = \frac{\sqrt{3}}{5} \arctan \frac{1+2\sqrt[3]{1+x^5}}{\sqrt{3}} + \frac{3}{10} \ln \left| \sqrt[3]{1+x^5} - 1 \right| - \frac{1}{2} \ln |x| + C \quad (7.3.28)$$

(11) 利用万能公式可得

$$\int \frac{dx}{3 + 2 \sin x} = \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan \frac{2 + 3 \tan \frac{x}{2}}{\sqrt{5}} + C \quad (7.3.29)$$

(12)

$$\int \sec^4 x dx = \int (1 + \tan^2 x) d(\tan x) = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C \quad (7.3.30)$$

(13) 令 $t = x^{-4}$ 、 $u = \sqrt[4]{1+t}$, 则

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{t\sqrt[4]{1+t}} = -\int \frac{u^2 du}{u^4 - 1} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}} + \frac{1}{4} \ln \frac{x + \sqrt[4]{1+x^4}}{x - \sqrt[4]{1+x^4}} + C \quad (7.3.31)$$

(14) 令 $t = \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}$, 则

$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = 12 \int (t^3 - 1)t^3 dt = \frac{12}{7} (1 + \sqrt[4]{x})^{7/3} - 3(1 + \sqrt[4]{x})^{4/3} + C \quad (7.3.32)$$

□

第8次习题课 定积分的性质与计算

2023年12月4日, 2024年11月28日, 2025年12月3日。本节对应微积分A(1)第9次习题课的内容。

8.1 知识点复习

8.1.1 定积分的概念

重要概念回顾

- (1) **Riemann 和**: 设 $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 为 $[a, b]$ 的一个划分, 选定区间的标志点 $\xi_k \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$, 则 f 在 $[a, b]$ 上的 Riemann 和为

$$S(f, P, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{=\Delta x_k = |I_k|} \quad (8.1.1)$$

- (2) **Riemann 可积**: 设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $\exists I \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$, 使得对任意划分 P ,

$$\|P\| := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}| < \delta_\varepsilon \implies \forall \xi = \{\xi_k \mid \xi_k \in I_k\}, |S(f, P, \xi) - I| < \varepsilon \quad (8.1.2)$$

则称 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, I 为 f 在 $[a, b]$ 上的 Riemann 积分 (定积分), 记作

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (8.1.3)$$

- (3) **Darboux 上下和**: 设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 有界, 给定划分 P , 定义

$$\bar{S}(f, P) = \sum_{k=1}^n \sup_{x \in I_k} f(x) |I_k|, \quad \underline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^n \inf_{x \in I_k} f(x) |I_k| \quad (8.1.4)$$

则显然有

$$\underline{S}(f, P) \leq S(f, P, \xi) \leq \bar{S}(f, P) \quad (8.1.5)$$

(4) **Darboux 可积**: 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $\exists I \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall \varepsilon > 0$, 存在划分 P , 使得

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, P) \leq I \leq \overline{S}(f, P) < I + \varepsilon \iff \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < 2\varepsilon \quad (8.1.6)$$

则称 f 在 $[a, b]$ 上 Darboux 可积。

(5) **零测集**: 设 $D \subseteq \mathbb{R}$, 若 $\forall \varepsilon > 0$, \exists 可数个区间 $\{I_k\}$, 使得

$$D \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \quad \wedge \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| < \varepsilon \quad (8.1.7)$$

则称 D 为零测集。

重要定理回顾

(1) 以下三个命题等价:

- (Riemann) f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积;
- (Darboux) f 在 $[a, b]$ 上 Darboux 可积;
- (Lebesgue) f 在 $[a, b]$ 上有界, 且 f 的间断点集是零测集。

(2) Riemann 可积的振幅表述: 记 $\omega_f(I) := \sup_{x, y \in I} |f(x) - f(y)|$, 则 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists [a, b]$ 的划分 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 使得

$$\sum_{k=1}^n \omega_f(I_k) \Delta x_k < \varepsilon \quad (8.1.8)$$

(3) $[a, b]$ 上的所有连续函数可积, $[a, b]$ 上的所有 (分段) 单调函数可积。

应用

- (1) 由速度计算路程、由密度计算质量、曲边梯形的面积。
- (2) Riemann 函数 Riemann 可积性、Dirichlet 函数 Riemann 不可积。

注

- (1) Riemann 可积的定义不需要对函数值 $f(x)$ 比大小, 所以这个定义可以适用于复数值的函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, 甚至是向量值的映射 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (此时需要将绝对值改为 \mathbb{R}^n 中的范数)。
- (2) 用 Riemann 可积的定义检验一个函数的可积性是不大现实的, 因为它需要检验所有划分和所有标志点; 但是, 如果已知一个函数可积, 那么这个定义给出了计算积分近似值的一个方便的办法, 可以任取足够细的划分和标志点集来计算 Riemann 和。

8.1.2 定积分的性质

重要定理回顾

(1) **线性**: 设 $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则 $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}[a, b]$, 且

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx \quad (8.1.9)$$

(2) **保序性**: 设 $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, 若 $\forall x \in [a, b]$ 都有 $f(x) \leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (8.1.10)$$

进一步地, 若 f, g 均在 $x_0 \in [a, b]$ 处连续且 $f(x_0) < g(x_0)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx \quad (8.1.11)$$

(3) **三角不等式**: 设 $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, 则

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (8.1.12)$$

(4) **第一积分中值定理** (积分平均值定理): 设 $f \in \mathcal{C}[a, b]$, $g \in \mathcal{R}[a, b]$ 且在 $[a, b]$ 上不变号, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx \quad (8.1.13)$$

简证: 不妨设 $g(x) \geq 0$, 则

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx \implies m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M \quad (8.1.14)$$

由介值定理知结论成立。

(5) **Cauchy-Schwarz 不等式**: 设 $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx \quad (8.1.15)$$

(6) ***第二积分中值定理**: 设 $f \in \mathcal{R}[a, b]$, g 在 $[a, b]$ 上单调, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx \quad (8.1.16)$$

注 $\int_a^b f(x)g(x) dx$ 定义了函数空间中 f 和 g 的内积, 从而可以定义 f 和 g 的正交性。

8.1.3 微积分基本定理与 Newton-Leibniz 公式

重要概念回顾

(1) **积分的有向性**: 设 $f \in \mathcal{R}[a, b]$, 定义 $\int_b^a f(x) dx := -\int_a^b f(x) dx$ 。

重要定理回顾

(1) **积分区域的可加性**: 设 $f \in \mathcal{R}(I)$, 则 $\forall a, b, c \in I$, 都有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (8.1.17)$$

或者记为

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = 0 \quad (8.1.18)$$

(2) **微积分基本定理 I**: 设 f 在区间 I 的任何有界闭子区间上可积, $a \in I$ 。记 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则

- $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ 连续;
- 若 f 在 $x_0 \in I$ 处连续, 则 F 在 x_0 处可微, 且 $F'(x_0) = f(x_0)$ 。
- 若 $f \in \mathcal{C}(I)$, 则 $F \in \mathcal{C}^1(I)$, 且 $F'(x) = f(x)$ 。

(3) 在一个区间上, 所有连续函数都有原函数。

(4) **微积分基本定理 II** (Newton-Leibniz 公式): 设 $f \in \mathcal{R}[a, b]$, F 是 f 的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (8.1.19)$$

应用

(1) 设 f 在区间 I 上连续, $u, v : [\alpha, \beta] \rightarrow I$ 可导, 则 $F(x) := \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可导, 且

$$F'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x) \quad (8.1.20)$$

(2) **定积分的数值计算**: 设 f 足够光滑, $F(h) = \int_{a-h/2}^{a+h/2} f(x) dx$, 则以下近似公式的精度为:

- **矩形公式**: $F(h) = hf(a) + \mathcal{O}(h^3)$;
- **梯形公式**: $F(h) = h \frac{f(a-\frac{h}{2}) + f(a+\frac{h}{2})}{2} + \mathcal{O}(h^3)$;
- **Simpson 公式**: $F(h) = h \frac{f(a-\frac{h}{2}) + 4f(a) + f(a+\frac{h}{2})}{6} + \mathcal{O}(h^5)$ 。

注

- (1) 微积分基本定理 I 针对的问题是：哪些函数会有原函数，以及如何给出一个原函数？答案是：连续函数都有原函数，连续函数的变上限积分给出一个原函数。但是，不是只有连续函数才有原函数，也不是所有函数都有原函数。
- (2) 微积分基本定理 II 针对的问题是：如何计算积分？答案是：如果被积函数有原函数，则定积分计算可以归结为寻找原函数，也就是不定积分。然而，并非每个函数都有原函数；对有原函数的函数，其原函数也未必是初等函数。

8.1.4 积分计算

重要定理回顾

- (1) **换元公式**：设 $f \in \mathcal{R}(I)$, $\varphi \in \mathcal{C}^1[a, b]$ 满足 $\varphi[a, b] = [\alpha, \beta] \subseteq I$, 则

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx \quad (8.1.21)$$

进一步地，若 φ 是单射，则

$$\int_{[a,b]} f(\varphi(t))|\varphi'(t)| dt = \int_{[\alpha,\beta]} f(x) dx \quad (8.1.22)$$

- (2) **分部积分**：设 $f, g \in \mathcal{C}^1[a, b]$, 则

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx \quad (8.1.23)$$

注 换元公式不仅为定积分计算提供了一个转化手段，更重要的是它表明定积分不仅可以看成是一个函数在区间上的积分，也可以看成在一维直线上沿一条路径的积分。

8.1.5 *一元定积分的数值计算

数值计算定积分在科学与工程计算中有着重要且广泛的应用。常用的方法可以分为：

- **插值求积法**：用多项式插值近似被积函数，从而将定积分转化为多项式的定积分，常用的插值求积法有：
 - **Newton-Cotes 求积法**：等距节点插值求积法，包括矩形公式、梯形公式、Simpson 公式等；
 - **Gauss 求积法**：最优节点插值求积法，通过选择合适的插值节点，使得代数精度尽可能高。
- **复合求积法**：将积分区间划分为若干子区间，在每个子区间上应用低阶插值求积法，然后将各子区间的结果相加，常用的复合求积法有：复合梯形公式、复合 Simpson 公式等。

- **自适应求积法**: 根据被积函数的性质动态调整子区间的划分, 使得在每个子区间上达到预定的误差要求, 从而提高计算效率和精度。
- **Monte-Carlo 求积法**: 基于概率统计的方法, 通过随机采样来估计定积分的值, 适用于高维积分和复杂区域的积分计算, 一般不用于一元定积分。

我们先定义一些重要概念。

定义 8.1.1 (多项式空间)

记 \mathcal{P}_n 表示所有次数不超过 n 的多项式构成的集合, 即

$$\mathcal{P}_n = \{P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\} \quad (8.1.24)$$

它是一个 $n+1$ 维线性空间, 其基为 $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ 。

定义 8.1.2 (代数精度)

设 $I(f) := \int_a^b f(x) dx$ 为需要计算的定积分, $Q(f)$ 为某一数值积分公式的近似值。若 $\exists n \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall P_n \in \mathcal{P}_n$, 都有 $I(P_n) = Q(P_n)$, 则称该数值积分公式的代数精度至少为 n 。若 $\exists P_{n+1} \in \mathcal{P}_{n+1}$, 使得 $I(P_{n+1}) \neq Q(P_{n+1})$, 则称该数值积分公式的代数精度为 n 。

由于积分具有线性, 因此数值积分公式的代数精度实际上只需要检验基 $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ 上的情况, 亦即

推论 8.1.3

若存在整数 $n \geq 0$, 使得 $\forall k = 0, 1, \cdots, n$, 都有 $I(x^k) = Q(x^k)$, 则该数值积分公式的代数精度至少为 n 。若存在 $k = n+1$, 使得 $I(x^{n+1}) \neq Q(x^{n+1})$, 则该数值积分公式的代数精度为 n 。

插值求积法的思路非常直接: 我们可以用 n 次多项式近似被积函数 (此时需要 $n+1$ 个插值节点), 然后计算该多项式的定积分, 从而得到被积函数的定积分的近似值。由于多项式的积分可以精确计算, 因此插值求积法的关键在于选择合适的插值节点。

Newton-Cotes 求积法选择等距节点。分别用左端点、中点、右端点的函数值来近似被积函数在区间上的积分, 得到的数值积分公式分别称为**左矩形公式**、**中点公式**和**右矩形公式**。左右矩形公式的代数精度均为 0, 中点公式的代数精度为 1。

$$\int_a^b f(x) dx \approx \begin{cases} (b-a)f(a), & \text{左矩形公式} \\ (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right), & \text{中点公式} \\ (b-a)f(b), & \text{右矩形公式} \end{cases} \quad (8.1.25)$$

如果用区间端点的线性插值来近似被积函数在区间上的积分, 得到的数值积分公式称为**梯形公式**, 其代

数精度为 1。

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (8.1.26)$$

如果用区间端点和中点的二次插值来近似被积函数在区间上的积分，得到的数值积分公式称为 **Simpson 公式**，其代数精度为 3。

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (8.1.27)$$

用更高阶的插值多项式来近似被积函数在区间上的积分，可以得到更高代数精度的 Newton-Cotes 求积公式；然而我们一般不使用 $n \geq 8$ 的 Newton-Cotes 求积公式，因为：

- 高阶 Newton-Cotes 求积公式的插值系数会出现负值，导致数值积分结果不稳定。
- 可以证明： $n+1$ 个等距插值节点的代数精度最多只能达到 $n+1$ ；通过选择最佳插值节点，可以使得代数精度达到 $2n+1$ ，称为 **Gauss 求积法**。

为了选择最佳插值节点，考虑带权积分

$$I(f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx \quad (8.1.28)$$

其中权函数 ρ 在 $[a, b]$ 上连续、在 (a, b) 内为正。我们的目标是：选择合适的插值节点 $\{x_k\}_{k=0}^n$ 和插值系数 $\{A_k\}_{k=0}^n$ ，使得数值积分公式

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \quad (8.1.29)$$

具有尽可能高的代数精度，这对应了如下 $2n+2$ 个非线性方程组：

$$Q_n(x^j) = I(x^j), \quad j = 0, 1, \dots, 2n+1 \quad (8.1.30)$$

直接求解此方程组非常困难，我们转而考虑以下问题。

设 $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ ，可以证明插值求积公式的截断误差满足

$$I(f) - Q_n(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \rho(x) f^{(n+1)}(\xi(x)) \omega_{n+1}(x) dx, \quad \xi(x) \in (a, b) \quad (8.1.31)$$

当 $f \in \mathcal{P}_{2n+1}$ 时， $f^{(n+1)} \in \mathcal{P}_n$ ，因此要使得截断误差为零，只需使得 $\omega_{n+1}(x)$ 与任意不超过 n 次多项式的带权积分正交，即

$$\int_a^b \rho(x) p_n(x) \omega_{n+1}(x) dx = 0, \quad \forall p_n \in \mathcal{P}_n \quad (8.1.32)$$

因此，我们只需选择 $\omega_{n+1}(x)$ 为权函数 ρ 对应的正交多项式，即选择 $\{x_k\}_{k=0}^n$ 为该正交多项式的 $n+1$ 个不同实根，即可得到代数精度为 $2n+1$ 的 Gauss 求积公式。插值系数 $\{A_k\}_{k=0}^n$ 可由下式计算得到：

$$A_k = \int_a^b \rho(x) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} dx \quad (8.1.33)$$

或者利用基函数 $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ 的积分精确值和近似值, 解线性方程组得到。

可以证明: Gauss 求积公式具有最优的代数精度, 并且插值系数均为正, 因此数值积分结果稳定。

常用的正交多项式有:

- **Legendre 多项式:** 对应权函数 $\rho(x) = 1$, 定义在区间 $[-1, 1]$ 上;
- **Chebyshev 多项式:** 对应权函数 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 定义在区间 $[-1, 1]$ 上;
- **Laguerre 多项式:** 对应权函数 $\rho(x) = e^{-x}$, 定义在区间 $[0, +\infty)$ 上;
- **Hermite 多项式:** 对应权函数 $\rho(x) = e^{-x^2}$, 定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上。

另一种思路是**复合求积法**。将积分区间划分为若干子区间, 在每个子区间上应用低阶插值求积法, 然后将各子区间的结果相加。设 $P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ 为 $[a, b]$ 的一个等距划分 (此时记 $h = \frac{b-a}{n}$), 则复合梯形公式和复合 Simpson 公式分别为:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \\ &\approx \sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_{k-1}}{6} \left[f(x_{k-1}) + 4f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + f(x_k) \right] \end{aligned} \quad (8.1.34)$$

可以证明: 复合梯形公式的误差为 $O(h^2)$, 复合 Simpson 公式的误差为 $O(h^4)$ 。

8.2 雨课堂作业

例 8.2.1 (作业第 1 题)

设 f, g 是 $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 的连续函数, f 单调不减。证明:

$$\int_0^1 f(g(x)) dx \leq \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx \quad (8.2.1)$$

证明 原式等价于证明

$$\int_0^1 [f(g(x)) - g(x)] dx \stackrel{?}{\leq} \int_0^1 f(x) dx \quad (8.2.2)$$

我们考虑证明以下加强命题

$$\int_0^1 [f(g(x)) - g(x)] dx \leq \int_0^1 \max_{y \in [0, 1]} [f(y) - y] dx = \max_{y \in [0, 1]} [f(y) - y] \stackrel{?}{\leq} \int_0^1 f(x) dx \quad (8.2.3)$$

这等价于证明

$$f(y) \leq y + \int_0^1 f(x) dx, \quad \forall y \in [0, 1] \quad (8.2.4)$$

由于 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 单调不减, 故 f 恒非负, 且满足

$$f(x) \geq f(y), \quad \forall x, y \in [0, 1], x \geq y \quad (8.2.5)$$

因此

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \int_y^1 f(x) dx \geq (1-y)f(y), \quad \forall y \in [0, 1] \quad (8.2.6)$$

于是 $\forall y \in [0, 1]$, 利用 $f(y) \in [0, 1]$ 可得

$$f(y) = yf(y) + (1-y)f(y) \leq y + \int_0^1 f(x) dx \quad (8.2.7)$$

此即所要证明的结论。 \square

例 8.2.2 (作业第 2 题)

计算积分:

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (8.2.8)$$

解 令 $x = \sec t$, 则 $dx = \sec t \tan t dt$, 对 t 积分的下、上限分别为 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{\pi}{3}$, 代入可得

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec t \tan t dt}{\sec t \sqrt{\sec^2 t - 1}} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} dt = \frac{\pi}{12} \quad (8.2.9)$$

\square

例 8.2.3 (作业第 3 题)

设 $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$ 。证明:

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \geq \sqrt{(b-a)^2 + [f(b) - f(a)]^2} \quad (8.2.10)$$

并给出等号成立的条件。

证明 利用 Cauchy 不等式的积分形式可得

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle \leq \|f\| \|g\| &\implies \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \sqrt{(b-a)^2 + [f(b) - f(a)]^2} dx \\ &\geq \int_a^b [b-a + f'(x)(f(b) - f(a))] dx = (b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2 \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

取等当且仅当

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \implies f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \quad (8.2.12)$$

\square

注 该不等式实际上是平面上两点间距离最短的证明。

例 8.2.4 (作业第 4 题)

设 $a > 0$, 求极限:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{x^3}{e^{ax}} dx \quad (8.2.13)$$

解 记 \mathcal{P}_3 表示所有次数不超过 3 的多项式, 若选择 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 为 \mathcal{P}_3 的一组基, 则对任意 $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathcal{P}_3$, 均可用向量表示为 $\mathbf{P} = (a_0, a_1, a_2, a_3)^T$. 定义 \mathcal{P}_3 上的求导算子:

$$\mathcal{D}: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3, \quad \mathcal{D}(P)(x) = e^{ax} \frac{d}{dx} (e^{-ax} P(x)) \quad (8.2.14)$$

容易验证 \mathcal{D} 是 \mathcal{P}_3 上的线性映射, 其在基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 上的矩阵表示为

$$[\mathcal{D}] = \begin{pmatrix} -a & 1 & & \\ & -a & 2 & \\ & & -a & 3 \\ & & & -a \end{pmatrix} \quad (8.2.15)$$

再定义 \mathcal{P}_3 上的积分算子¹:

$$\mathcal{I}: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3, \quad \mathcal{I}(P)(x) = e^{ax} \int_{+\infty}^x e^{-at} P(t) dt \quad (8.2.16)$$

容易验证 \mathcal{I} 是 \mathcal{P}_3 上的线性映射, 且 $\mathcal{I} \circ \mathcal{D} = \mathcal{D} \circ \mathcal{I} = \text{恒等映射}$. 由此可知 $[\mathcal{I}] = [\mathcal{D}]^{-1}$, 计算可得

$$[\mathcal{I}] = - \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} & \frac{2}{a^3} & \frac{6}{a^4} \\ & \frac{1}{a} & \frac{2}{a^2} & \frac{6}{a^3} \\ & & \frac{1}{a} & \frac{3}{a^2} \\ & & & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad (8.2.17)$$

记 $C := \int_0^{+\infty} e^{-ax} x^3 dx$, 因此

$$\int_0^n e^{-ax} x^3 dx = e^{-an} \mathcal{I}(\mathbf{P})(n) + C = -e^{-an} \left(\frac{6}{a^4} + \frac{6n}{a^3} + \frac{3n^2}{a^2} + \frac{n^3}{a} \right) + C \quad (8.2.18)$$

令 $n = 0$ 可得 $C = \frac{6}{a^4}$. □

例 8.2.5 (作业第 5 题)

已知

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots = \frac{\pi}{4} \quad (8.2.19)$$

¹为了完美定义 \mathcal{I} , 我们很难绕过这里的广义积分。我们知道, 不定积分的结果实际上是一系列函数, 它们之间相差任意常数; 为了消除 $\int_c^x e^{-at} P(t) dt$ 中的任意常数, 使得积分结果的形式为 $e^{-ax} \tilde{P}(x)$, 可以证明恰有 $c = +\infty$ 。

求极限:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx \quad (8.2.20)$$

解 记 $a_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx$, 利用和差化积公式可得

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx - \sin 2(n-1)x}{\sin x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos(2n-1)x dx \\ &= \frac{2}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} = \frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1} \end{aligned} \quad (8.2.21)$$

因此

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (8.2.22)$$

□

例 8.2.6 (作业第 6 题)

求 $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx$ 的值, 并证明 $\pi < \frac{22}{7}$ 。

解 计算可得

$$I = \int_0^1 \left(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - 4 \times \frac{\pi}{4} = \frac{22}{7} - \pi \quad (8.2.23)$$

由于被积函数在 $(0, 1)$ 上恒正, 故 $I > 0$, 从而 $\pi < \frac{22}{7}$ 。 □

注 欢迎大家把玩“注意力计算器·自动生成积分证明”: <http://zhuyidao.com/>。

例 8.2.7 (作业第 7 题)

证明以下不等式:

(1) $\forall x \in [0, \pi]$ 和 $t \in [0, 1]$, 都有 $\sin(tx) \geq t \sin x$;

(2) $\forall p > 0$, 都有 $\int_0^{\pi/2} |\sin u|^p du \geq \frac{\pi}{2(p+1)}$;

(3) $\forall x \geq 0$ 和 $p > 0$ 都有 $\int_0^x |\sin u|^p du \geq \frac{x|\sin x|^p}{p+1}$ 。

解 (1) 考虑 $g(x) = \sin(tx) - t \sin x$, 利用 $tx \leq x$ 以及 \cos 在 $[0, \pi]$ 上严格减, 求导可得

$$g'(x) = t \cos(tx) - t \cos x = t[\cos(tx) - \cos x] \geq 0 \quad (8.2.24)$$

故 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调不减, 且 $g(0) = 0$, 从而 $g(x) \geq 0$.

(2) 令 $u = \frac{\pi}{2}t$, 利用 (1) 中的不等式可得

$$\int_0^{\pi/2} |\sin u|^p du = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left| \sin \frac{\pi t}{2} \right|^p dt \geq \frac{\pi}{2} \int_0^1 t^p dt = \frac{\pi}{2(p+1)} \quad (8.2.25)$$

(3) 当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, 令 $u = xt$, 类似 (2) 可得

$$\int_0^x |\sin u|^p du = x \int_0^1 |\sin(xt)|^p dt \geq x \int_0^1 t^p |\sin x|^p dt = \frac{x |\sin x|^p}{p+1} \quad (8.2.26)$$

当 $x > \pi$ 时, 注意到 $|\sin x| = |\sin(x - \pi)|$, 设 $x = k\pi + r$, 其中 $k = \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor$, $r = x - k\pi \in [0, \pi)$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^x |\sin u|^p du &= k \int_0^\pi |\sin u|^p du + \int_0^r |\sin u|^p du = 2k \int_0^{\pi/2} |\sin u|^p du + \int_0^r |\sin u|^p du \\ &\geq 2k \cdot \frac{\pi}{2(p+1)} + \frac{r |\sin r|^p}{p+1} \geq \frac{k\pi |\sin x|^p}{p+1} + \frac{r |\sin x|^p}{p+1} = \frac{x |\sin x|^p}{p+1} \end{aligned} \quad (8.2.27)$$

□

例 8.2.8 (作业第 8 题)

求 $[0, 1]$ 上的可积函数 f 使得 $\forall x \in [0, 1]$ 都有:

$$f(x) = 1 + (1-x) \int_0^x yf(y) dy + x \int_x^1 (1-y)f(y) dy \quad (8.2.28)$$

解 由 f 可积可知

- 等号右端关于 x 连续, 从而 f 连续;
- 等号右端关于 x 连续可微, 从而 f 连续可微;
- 等号右端关于 x 二阶连续可微, 从而 f 二阶连续可微.....

如此可知 f 任意阶连续可微. 两边求导可得

$$f'(x) = - \int_0^x yf(y) dy + \int_x^1 (1-y)f(y) dy \quad (8.2.29)$$

再求导得到

$$f''(x) + f(x) = 0 \quad (8.2.30)$$

这是一个二阶常系数齐次线性微分方程, 其通解为

$$f(x) = A \cos x + B \sin x \quad (8.2.31)$$

利用边界条件可得

$$f(0) = f(1) = 1 \quad (8.2.32)$$

解得

$$A = 1, \quad B = \frac{1 - \cos 1}{\sin 1} \quad (8.2.33)$$

因此所求函数为

$$f(x) = \cos x + \frac{1 - \cos 1}{\sin 1} \sin x \quad (8.2.34)$$

□

例 8.2.9 (作业第 9 题)

求极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} \tan(u^2) du}{x^3} \quad (8.2.35)$$

解 利用 L'Hôpital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} \tan(u^2) du}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan(4x^2)}{3x^2} = \frac{8}{3} \quad (8.2.36)$$

□

例 8.2.10 (作业第 10 题)

求由方程

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = x \quad (8.2.37)$$

确定的函数 $y(x)$ 。

解 直接积分可得

$$\sinh^{-1} y = x \implies y(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (8.2.38)$$

□

例 8.2.11 (作业第 11 题)

为估算 $\int_a^b f(x) dx$, 可考虑以下算法:

- (1) 左端点: $f(a)(b-a)$;
- (2) 右端点: $f(b)(b-a)$;
- (3) 中点: $f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$;
- (4) 梯形: $\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$;
- (5) 混合形: $(Af(a) + Bf\left(\frac{a+b}{2}\right) + Cf(b))(b-a)$ 。

对于增函数、凸函数、二阶可微函数, 比较上述算法的优劣, 比如它们与积分真值之间的误差, 或者当 $b-a \rightarrow 0^+$ 时误差的阶。

解 将积分 $I := \int_a^b f(x) dx$ 和各积分近似公式 I_1, \dots, I_5 视作关于 $h = b-a$ 的函数, 利用 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned} I_1(h) - I(h) &= -\frac{1}{2}f'(a)h^2 + o(h^2) \\ I_2(h) - I(h) &= \frac{1}{2}f'(a)h^2 + o(h^2) \\ I_3(h) - I(h) &= -\frac{1}{24}f''(a)h^3 + o(h^3) \\ I_4(h) - I(h) &= \frac{1}{12}f''(a)h^3 + o(h^3) \\ I_5(h) - I(h) &= (A+B+C-1)h + \frac{B+2C-1}{2}h^2 + \frac{3B+12C-4}{24}f''(a)h^3 \\ &\quad + \frac{8C+B-2}{48}h^4 + \frac{5B+80C-16}{1920}h^5 + o(h^5) \end{aligned} \quad (8.2.39)$$

为了使得 $I_5(h)$ 的误差阶最高, 需解方程组

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ B+2C=1 \\ 3B+12C=4 \end{cases} \implies \begin{cases} A=\frac{1}{6} \\ B=\frac{2}{3} \\ C=\frac{1}{6} \end{cases} \implies I_5(h) - I(h) = \frac{1}{2880}f^{(4)}(a)h^5 + o(h^5) \quad (8.2.40)$$

□

例 8.2.12 (作业第 12 题)

设 $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ 。证明以下函数都在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积:

$$|f|, \quad \max\{f, g\}, \quad \sqrt{|f|}, \quad \sup_{t \in [a, x]} f(t) \quad (8.2.41)$$

证明 在 f, g 的连续点, 均有上述函数连续, 故上述函数的间断点集含于 f, g 的间断点集的并集; 而 f, g 的间断点集均为零测集, 因此上述函数的间断点集也是零测集, 从而它们均 Riemann 可积。 □

例 8.2.13 (作业第 13 题)

- (1) 设 $f \in \mathcal{C}[a, b]$ 且 $f(x) \geq 0$ ($\forall x \in [a, b]$)。证明: 若 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 则 $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$;
- (2) 证明不存在非负连续函数 $f \in \mathcal{C}[a, b]$ 使得存在实数 α 使得

$$\int_a^b f(x) dx = 1, \quad \int_a^b xf(x) dx = \alpha, \quad \int_a^b x^2 f(x) dx = \alpha^2 \quad (8.2.42)$$

证明 (1) 采用反证法。假设 $\exists x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) > 0$, 由 f 的连续性可知 $\exists \delta > 0$ 使得 $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ 。因此

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]} f(x) dx \geq \int_{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]} \frac{f(x_0)}{2} dx \geq \frac{f(x_0)}{2} \delta > 0 \quad (8.2.43)$$

与假设矛盾, 故结论成立。

(2) 注意到

$$0 = \alpha^2 - 2\alpha^2 + \alpha^2 = \int_a^b (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) f(x) dx = \int_a^b (x - \alpha)^2 f(x) dx \quad (8.2.44)$$

由于被积函数 $(x - \alpha)^2 f(x) \geq 0$, 由 (1) 可知 $(x - \alpha)^2 f(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$ 。因此 $f(x) = 0$ ($\forall x \in [a, b]$), 与 $\int_a^b f(x) dx = 1$ 矛盾, 故结论成立。□

8.3 补充习题

8.3.1 函数的可积性

例 8.3.1

在有界闭区间上, 以下哪些函数可积?

- (1) 连续函数。
- (2) 单调函数。
- (3) g 是有界函数, $f(x) = \sup_{a \leq t \leq x} g(t)$ 。
- (4) $f + g, fg$, 其中 $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ 。
- (5) $1/f$, 其中 $f \in \mathcal{R}[a, b]$ 是恒不为零的函数。
- (6) $g \circ f$, 其中 f, g 可积。
- (7) Dirichlet 函数。
- (8) Riemann 函数。
- (9) $f \in \mathcal{R}[a, b]$ 在子区间 $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ 上。

解 (1) 有界闭区间上的连续函数是有界函数, 由 Lebesgue 准则知结论成立。

(2) 有界闭区间上的单调函数是有界函数, 单调函数至多只有可数无穷多个间断点, 可数集是零测集。

(3) f 是单调不减的有界函数, 从而可积。

(4) $f+g, fg$ 都是有界函数, 它们的间断点集是 f 的间断点集和 g 的间断点集的并集的子集, 两个 (甚至可数多个) 零测集的并集是零测集。

(5) 如果 $|f|$ 有正下界, 则 $1/f$ 有界, $1/f$ 的间断点是 f 的间断点, 从而 $1/f$ 可积。但如果 $|f|$ 无下界, 则 $1/f$ 无界, 从而 f 不可积。

(6) $g \circ f$ 有界。若 g 连续, 则 $g \circ f$ 的间断点集是 f 的间断点集的子集, 从而是零测集, 于是 $g \circ f$ 可积。若 g 不连续则存在反例, 设 $g(x) = (\operatorname{sgn} x)^2$, f 为 Riemann 函数, 则 $g \circ f$ 为 Dirichlet 函数, 不可积。

(7) Dirichlet 函数在所有点间断, 不可积。

(8) Riemann 函数有界, 仅在有理数处间断, 有理数集是零测集。所以 Riemann 函数可积。

(9) $f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ 。 □

8.3.2 定积分的近似计算

例 8.3.2

证明对充分大的正整数 n , 有

$$0.75n < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n}} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}} + 1 < 0.85n \quad (8.3.1)$$

解 设 $f(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 容易验证 f 可积。注意到

$$\frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n}} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}} + 1 \right] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (8.3.2)$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n}} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}} + 1 \right] = \int_0^1 x^x dx \quad (8.3.3)$$

由于 $f(x)$ 是下凸函数且有极小值点 $x = e^{-1}$, $f(x) = x^x = e^{x \ln x} \geq 1 + x \ln x$, 因此

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^x dx &> \int_0^1 (1 + x \ln x) dx = \left[x + \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right]_0^1 = \frac{3}{4} \\ \int_0^1 x^x dx &< \frac{f(0) + f(e^{-1})}{2} (e^{-1} - 0) + \frac{f(e^{-1}) + f(1)}{2} (1 - e^{-1}) \\ &= \frac{1 + e^{-e^{-1}}}{2} < 0.85 \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

因此对充分大的正整数 n , 有

$$0.75n < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n}} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}} + 1 < 0.85n \quad (8.3.5)$$

□

例 8.3.3

设 $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且严格增, $f(0) = 0$, f^{-1} 是其反函数. 证明: $\forall a \in [0, +\infty)$, $\forall b \in f([0, +\infty))$, 有

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy \geq ab \quad (8.3.6)$$

其中等号成立当且仅当 $b = f(a)$.

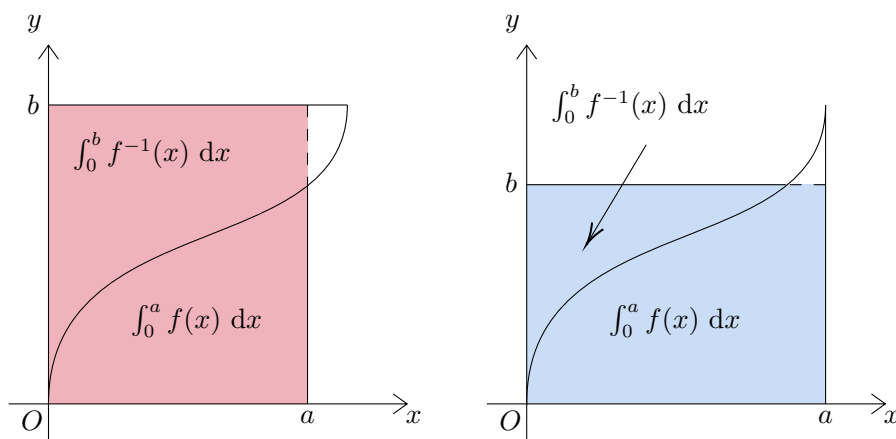


图 8.3.1: 题图

证明 题图给了我们一些提示. 由于 f 严格增, 故 f^{-1} 同样严格增.

Step 1. 1° 若 f 可微, 我们能够通过积分换元来证明. 注意到

$$\int_0^{f(a)} f^{-1}(x) dx \xrightarrow{x=f(t)} \int_0^a t f'(t) dt = t f(t) \Big|_0^a - \int_0^a f(t) dt = a f(a) - \int_0^a f(t) dt \quad (8.3.7)$$

亦即

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(x) dx = a f(a) \quad (8.3.8)$$

2° 若 f 仅仅可积, 我们需要通过定义来证明. 对 $[0, a]$ 的任意划分 $P: 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$,

$f(P) : 0 = f(x_0) < f(x_1) < \cdots < f(x_n) = f(a)$ 亦是 $[0, f(a)]$ 的划分, 因此两者的 Riemann 和满足

$$\begin{aligned} & S(f, P, \{x_k\}_{k=1}^n) + S(f^{-1}, f(P), \{f(x_k)\}_{k=0}^{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n [f(x_k)(x_k - x_{k-1}) + f^{-1}(f(x_{k-1}))(f(x_k) - f(x_{k-1}))] \\ &= \sum_{k=1}^n [x_k f(x_k) - x_{k-1} f(x_{k-1})] = af(a) \end{aligned} \quad (8.3.9)$$

令 $\|P\| \rightarrow 0$, 即得

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(x) dx = af(a) \quad (8.3.10)$$

Step 2. 若 $b \geq f(a)$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(x) dx + \int_{f(a)}^b f^{-1}(y) dy \\ &\geq af(a) + \int_{f(a)}^b f^{-1}(f(a)) dy \\ &= af(a) + f(a)(b - f(a)) = ab \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

若 $b \leq f(a)$, 记 $c = f^{-1}(b)$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy &= \int_0^c f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy + \int_c^a f(x) dx \\ &\geq cf(c) + \int_c^a f(c) dx \\ &= cf(c) + f(c)(a - c) = ab \end{aligned} \quad (8.3.12)$$

易见两者的取等条件均为 $b = f(a)$. □

例 8.3.4

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是凸函数. 证明 f 可积, 且

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \quad (8.3.13)$$

证明 因为 f 为凸函数, 故 f 在开区间 (a, b) 内处处有单侧导数, 从而在开区间 (a, b) 连续. $\forall x \in [a, b]$, 记 $\lambda = \frac{b-x}{b-a} \in [0, 1]$, 则有 $x = \lambda a + (1-\lambda)b$, 由凸函数的定义可知

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \leq \max\{f(a), f(b)\} \quad (8.3.14)$$

故函数有上界. 再注意到

$$f(x) \geq f'_+\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (8.3.15)$$

故函数有下界, 且至多有两个间断点 a, b , 从而可积。因此

$$f\left(\frac{b+a}{2}\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \quad (8.3.16)$$

□

注 凸函数的定义: $\forall x_1, x_2 \in [a, b], \forall \lambda \in [0, 1]$, 有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \quad (8.3.17)$$

例 8.3.5

设 f 有足够的可微性。对充分小的 h , 分别用

$$F_1(h) = 2f(0)h, \quad F_2(h) = [f(-h) + f(h)]h \quad (8.3.18)$$

作为 $F(h) = \int_{-h}^h f(x) dx$ 的近似值。试分析误差的阶, 并求常数 λ, μ 使得 $\lambda F_1(h) + \mu F_2(h)$ 有尽可能小 (尽量高阶的无穷小) 的误差。

解 记 $R_k(h) = F_k(h) - F(h)$, 对 R'_k 进行 Taylor 展开, 只保留 h 的偶次方项

$$\begin{aligned} R'_1(h) &= 2f(0) - F'(h) = 2f(0) - f(h) - f(-h) \\ &= 2f(0) - \left[f(0) + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_1)h^4 \right] - \left[f(0) + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\eta_1)h^4 \right] \\ &= -f''(0)h^2 - \frac{1}{24} [f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\eta_1)] h^4 \end{aligned} \quad (8.3.19)$$

$$\begin{aligned} R'_2(h) &= f(-h) + f(h) + h[f'(h) - f'(-h)] - F'(h) = h[f'(h) - f'(-h)] \\ &= h \left[2f''(0)h + \frac{1}{6}f^{(4)}(\xi_2)h^3 + \frac{1}{6}f^{(4)}(\eta_2)h^3 \right] \\ &= 2f''(0)h^2 + \frac{1}{6} [f^{(4)}(\xi_2) + f^{(4)}(\eta_2)] h^4 \end{aligned} \quad (8.3.20)$$

故 R'_1, R'_2 均为二阶小量, 因此 R_1, R_2 均为三阶小量。注意到

$$[2R_1(h) + R_2(h)]' = \mathcal{O}(h^4) \implies 2R_1(h) + R_2(h) = \mathcal{O}(h^5), \quad h \rightarrow 0 \quad (8.3.21)$$

因此 $2R_1 + R_2$ 具有更高的阶, 此时

$$\mathcal{O}(h^5) = 2R_1(h) + R_2(h) = 4f(0)h - [f(h) + f(-h)]h - 3 \int_{-h}^h f(x) dx \quad (8.3.22)$$

由此得到

$$\int_{-h}^h f(x) dx = \frac{f(-h) + 4f(0) + f(h)}{3} h + \mathcal{O}(h^5) \quad (8.3.23)$$

此即 Simpson 公式, 其更一般的形式为

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] + \mathcal{O}((b-a)^5) \quad (8.3.24)$$

□

8.3.3 定积分计算

例 8.3.6

计算以下定积分:

(1) $\int_0^2 |1-x| dx$

(2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

(3) $\int_{-1}^1 (2x+1) dx$

解 画图。

□

例 8.3.7

计算以下定积分:

(1) $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$, 其中 $m, n \in \mathbb{N}^*$

(3) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x}$

(6) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^x} dx$

(4) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}} dx$

(7) $\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x}$

(2) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$

(5) $\int_0^1 \sqrt{2x+x^2} dx$

(8) $\int_0^{3\pi/4} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$

解 (1) 记 $G(m, n) := \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!} dx$, 由分部积分可得

$$\begin{aligned} G(m, n) &= \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!} d \frac{x^m}{m!} = \frac{(1-x)^{n-1} x^m}{(n-1)! m!} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^m}{m!} d \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-2} x^m}{(n-2)! m!} dx = G(m+1, n-1) = \cdots = G(m+n-1, 1) \\ &= \int_0^1 \frac{x^{m+n-2}}{(m+n-2)!} dx = \frac{1}{(m+n-1)!} \end{aligned} \quad (8.3.25)$$

因此

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \quad (8.3.26)$$

(2) 记 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, 由分部积分可得

$$\begin{aligned} I_n &= - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x d \cos x = - \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} I_{n-4} = \cdots = \frac{(n-1)!!}{n!!} I_{n \bmod 2} \end{aligned} \quad (8.3.27)$$

其中 $I_0 = \frac{\pi}{2}$ 、 $I_1 = 1$ 。

$$(3) \quad \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} = \ln(\sec x + \tan x)|_0^{\pi/4} = \ln(1 + \sqrt{2}) \quad (8.3.28)$$

$$(4) \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{4 - \sqrt{x}} dx = (-8\sqrt{x} - x - 32 \ln(4 - \sqrt{x}))|_0^1 = -9 + 32 \ln \frac{4}{3} \quad (8.3.29)$$

$$(5) \quad \int_0^1 \sqrt{2x + x^2} dx = \left[\frac{(x+1)\sqrt{x(x+2)}}{2} + \ln(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) \right]_0^1 = \sqrt{3} + \ln(\sqrt{3} - 1) - \frac{\ln 2}{2} \quad (8.3.30)$$

$$(6) \quad \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + e^x} dx = [2\sqrt{1 + e^x} + x - 2 \ln(\sqrt{1 + e^x} + 1)]_0^{\ln 2} = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \ln 2 - 2 \ln \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2} + 1} \quad (8.3.31)$$

$$(7) \quad \int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad (8.3.32)$$

$$(8) \quad \int_0^{3\pi/4} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\arctan \cos x \Big|_0^{3\pi/4} = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \quad (8.3.33)$$

□

例 8.3.8

(1) 设 $f \in \mathcal{C}[0, 1]$, 证明:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx, \quad \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \quad (8.3.34)$$

(2) 求:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (8.3.35)$$

(3) 证明: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, 有

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \tan^{\alpha} x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cot^{\alpha} x} \quad (8.3.36)$$

解 (1) 令 $t = \frac{\pi}{2} - x$, 则有

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_{\pi/2}^0 f(\cos t) d(-t) = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx \quad (8.3.37)$$

令 $t = \pi - x$, 则有

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x f(\sin x) dx &= \int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin t) d(-t) = \pi \int_0^\pi f(\sin x) dx - \int_0^\pi x f(\sin x) dx \\ \Rightarrow \int_0^\pi x f(\sin x) dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx \end{aligned} \quad (8.3.38)$$

(2) 由 (1) 可得

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} (-\arctan \cos x)_0^\pi = \frac{\pi^2}{4} \quad (8.3.39)$$

(3) 令 $t = \frac{\pi}{2} - x$, 则有

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \tan^\alpha x} = \int_{\pi/2}^0 \frac{d(-t)}{1 + \cot^\alpha t} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cot^\alpha x} \quad (8.3.40)$$

□

例 8.3.9

(1) 设 f 连续, 证明:

$$\int_0^x (x-t)f(t) dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(s) ds \right) dt \quad (8.3.41)$$

(2) 求:

$$\int_0^1 x \left(\int_1^{x^2} e^{-t^2} dt \right) dx \quad (8.3.42)$$

解 (1) 因为 f 连续, 故 $F(t) := \int_0^t f(s) ds$ 可微, 由分部积分可得

$$\int_0^x \int_0^t f(s) ds dt = \int_0^x F(t) dt = tF(t)|_0^x - \int_0^x tF'(t) dt = \int_0^x (x-t)f(t) dt \quad (8.3.43)$$

(2) 由分部积分可得

$$\int_0^1 x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt dx = \frac{x^2}{2} \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt \Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} e^{-x^4} d(x^2) = \frac{1}{4}(e^{-1} - 1) \quad (8.3.44)$$

□

8.3.4 有关定积分的证明题

例 8.3.10

设 f 可积, 在 $x=0$ 处连续. 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{h}{x^2 + h^2} f(x) dx = \pi f(0) \quad (8.3.45)$$

证明 不妨设 $f(0) = 0$, 否则可以考虑 $g: x \mapsto f(x) - f(0)$, 此时有

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{h}{x^2 + h^2} g(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{h}{x^2 + h^2} f(x) dx - f(0) \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{h}{x^2 + h^2} dx \quad (8.3.46)$$

而

$$\int_{-1}^1 \frac{h}{x^2 + h^2} dx = \arctan \frac{x}{h} \Big|_{-1}^1 = 2 \arctan \frac{1}{h} \rightarrow \pi, \quad h \rightarrow 0^+ \quad (8.3.47)$$

由于 f 可积, 故 f 在 $[-1, 1]$ 上有界, 即 $\forall x \in [-1, 1]$, 有 $|f(x)| \leq M$, 其中 $M > 0$. 由于 f 在 $x=0$ 处连续, 故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $|x| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon$. 因此

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 \frac{h}{x^2 + h^2} f(x) dx \right| &= \left| \int_{|x| < \delta} \frac{h}{x^2 + h^2} f(x) dx + \int_{\delta \leq |x| \leq 1} \frac{h}{x^2 + h^2} f(x) dx \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \frac{h}{x^2 + h^2} dx + \frac{2hM}{\delta^2} = \varepsilon \arctan \frac{x}{h} \Big|_{-\delta}^{\delta} + \frac{2hM}{\delta^2} \\ &= 2\varepsilon \arctan \frac{\delta}{h} + \frac{2hM}{\delta^2} \leq \pi\varepsilon + \frac{2hM}{\delta^2} \stackrel{?}{<} 4\varepsilon \end{aligned} \quad (8.3.48)$$

取 $0 < h < \frac{\delta^2}{2M}(4 - \pi)\varepsilon$ 即可. 因此

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{h}{x^2 + h^2} f(x) dx = 0 = \pi f(0) \quad (8.3.49)$$

□

例 8.3.11

设 $f \in \mathcal{C}[0, 2\pi]$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad (8.3.50)$$

证明 由积分换元、积分中值定理、Riemann 和定义可得

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) |\sin nx| dx &= \sum_{k=1}^{2n} \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} f(x) |\sin nx| dx = \sum_{k=1}^{2n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f\left(\frac{t}{n}\right) |\sin t| d\frac{t}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n} f(\xi_k) \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt, \quad \xi_k \in \left(\frac{(k-1)\pi}{n}, \frac{k\pi}{n}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{2n} f(\xi_k) \frac{2\pi}{2n} \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad n \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (8.3.51)$$

□

例 8.3.12

设 $f \in \mathcal{C}[a, b]$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n dx \right)^{1/n} = M = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (8.3.52)$$

证明 任取 $M_1 < M_3 < M < M_2$, 注意到

$$\left(\int_a^b |f(x)|^n dx \right)^{1/n} \leq \left(\int_a^b M^n dx \right)^{1/n} = M \sqrt[n]{b-a} \rightarrow M, \quad n \rightarrow +\infty \quad (8.3.53)$$

由于 f 连续, 故存在 $|f|$ 最大值点 ξ 的一个邻域 $[\alpha, \beta]$ 使得 $x \in [\alpha, \beta] \implies |f(x)| > M_3$, 因此

$$\left(\int_a^b |f(x)|^n dx \right)^{1/n} \geq \left(\int_\alpha^\beta M_3^n dx \right)^{1/n} = M_3 \sqrt[n]{\beta-\alpha} \rightarrow M_3, \quad n \rightarrow +\infty \quad (8.3.54)$$

由极限的保号性可得 $\forall M_1, M_2$ 满足 $M_1 < M < M_2$, 均有

$$M_1 < M_3 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^n dx \right)^{1/n} \leq M < M_2 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n dx \right)^{1/n} = M \quad (8.3.55)$$

□

例 8.3.13 (Riemann-Lebesgue 引理)

设 $f \in \mathcal{R}[a, b]$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx = 0 \quad (8.3.56)$$

证明 本题比作业题要难得多, 其基本思路是: 当 n 非常大时, $\sin nx$ 的周期非常小, f 在一个周期内近似可视作常函数, 乘积函数的积分为 0, 从而整体的积分为 0。下面需要把这样的数学直觉转换为严格的证明。

不妨设 f 在 $[a - 2\pi, a) \cup (b, b + 2\pi]$ 上的值恒为 0。设 $K_0 \in \mathbb{Z}$ 、 $K \in \mathbb{N}^*$ 满足

$$\frac{2\pi}{n} K_0 \leq a < \frac{2\pi}{n} (K_0 + 1), \quad \frac{2\pi}{n} (K_0 + K - 1) < b \leq \frac{2\pi}{n} (K_0 + K) \quad (8.3.57)$$

记 $x_i := \frac{2\pi}{n} K_0 + \frac{\pi}{n} i$ 、 $\omega_i = \sup_{y, z \in [x_{2i-2}, x_{2i}]} |f(y) - f(z)|$, 由 Riemann 可积的定义知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^K \omega_i \frac{2\pi}{n} = 0 \quad (8.3.58)$$

由积分中值定理可得

$$\int_a^b f(x) \sin nx dx = \sum_{i=1}^{2K} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \sin nx dx = \sum_{i=1}^{2K} f(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin nx dx \quad (8.3.59)$$

其中 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 。注意到

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin nx \, dx = \frac{2}{n}(-1)^{i-1} \quad (8.3.60)$$

故有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{2K} (-1)^{i-1} f(\xi_i) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^K [f(\xi_{2i-1}) - f(\xi_{2i})] \\ \left| \int_a^b f(x) \sin nx \, dx \right| &\leq \frac{2}{n} \sum_{i=1}^K |f(\xi_{2i-1}) - f(\xi_{2i})| \leq \frac{2}{n} \sum_{i=1}^K \omega_i \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (8.3.61)$$

亦即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = 0 \quad (8.3.62)$$

□

例 8.3.14

设 $f \in \mathcal{R}[a, b]$ 且 f 恒正。求证：^a

$$\int_a^b f(x) \, dx > 0 \quad (8.3.63)$$

^a本题和下题均参考：谢惠民，恽自求，易法槐，钱定边：数学分析习题课讲义（第2版）（上册）。

证明 由于 f 可积，故 f 的间断点集为零测集，故 f 必存在连续点 ξ ， $f(\xi) > 0$ 。取 $\varepsilon = \frac{f(\xi)}{2}$ ，则 $\exists \delta \in (0, \frac{b-a}{2})$ 使得

$$|x - \xi| < \delta \implies -\frac{f(\xi)}{2} < f(x) - f(\xi) < \frac{f(\xi)}{2} \implies f(x) > \frac{f(\xi)}{2} \quad (8.3.64)$$

由于 $[\xi - \delta, \xi] \subseteq [a, b]$ 和 $[\xi, \xi + \delta] \subseteq [a, b]$ 中必有之一成立，不妨设为 $[\xi, \xi + \delta]$ ，否则可以考虑 $f(a + b - x)$ ，则有

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_{\xi}^{\xi+\delta} f(x) \, dx > \int_{\xi}^{\xi+\delta} \frac{f(\xi)}{2} \, dx = \frac{f(\xi)}{2} \delta > 0 \quad (8.3.65)$$

□

另证 由定积分（极限）的保号性，很容易证明

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b 0 \, dx = 0 \quad (8.3.66)$$

为了排除这个等式，我们考虑使用反证法。假设 $\int_a^b f(x) \, dx = 0$ ，任给 $[a, b]$ 的划分 P 和标志点集 $\{x_k\}_{k=1}^n$ ，当 $\|P\| \rightarrow 0$ 时，Darboux 上和 $\bar{S}(f, P, \{x_k\}_{k=1}^n)$ 收敛于 0。于是 $\forall \varepsilon_1 > 0$ ， $\exists [a_1, b_1] \subset [a, b]$ 使得 $x \in [a_1, b_1] \implies f(x) < \varepsilon_1$ ，否则 $\exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 使得 $f(\xi_i) \geq \varepsilon_1$ ，此时有

$$\bar{S}(f, P, \{x_k\}_{k=1}^n) \geq \sum_{i=1}^n \varepsilon_1 (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon_1 (b - a) \quad (8.3.67)$$

与其收敛于 0 矛盾。

记 $a_0 := a$, $b_0 := b$ 。取 $\varepsilon = \frac{1}{i+1}$, 由上述论证可知对任意区间 $[a_i, b_i]$, 存在区间 $[a_{i+1}, b_{i+1}] \subset [a_i, b_i]$ 且满足 $b_{i+1} - a_{i+1} \leq \frac{b_i - a_i}{2}$, 使得 $x \in [a_{i+1}, b_{i+1}] \implies f(x) < \varepsilon = \frac{1}{i+1}$ 。由有界闭区间套定理可知 $\exists \xi \in \bigcap_{i=0}^{+\infty} [a_i, b_i]$ 使得 $f(\xi) = 0$, 与 f 恒正矛盾。 \square

例 8.3.15

设非负函数 $f \in \mathcal{R}[a, b]$, f 的间断点集为 D , 证明:

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \iff f(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b] \setminus D \quad (8.3.68)$$

证明 \implies : 采用反证法。假设 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 却 $\exists x_0 \in [a, b]$ 使得 f 在 x_0 处连续且 $f(x_0) \neq 0$ 。取 $\varepsilon = \frac{1}{2}f(x_0)$, 则 $\exists \delta > 0$ 使得

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b] \implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}f(x_0) \implies f(x) > \frac{1}{2}f(x_0) \quad (8.3.69)$$

不妨设 x_0 为 $[a, b]$ 的内点以及 δ 充分小, 使得 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [a, b]$, 则有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_0 - \delta} f(x) dx + \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx + \int_{x_0 + \delta}^b f(x) dx \\ &\geq 0 + \frac{1}{2}f(x_0) \cdot 2\delta + 0 = \delta f(x_0) > 0 \end{aligned} \quad (8.3.70)$$

与 $\int_a^b f(x) dx = 0$ 矛盾。故假设不成立, 即 $f(x) = 0, \forall x \in [a, b] \setminus D$ 。

\impliedby : 通俗地说, 这里的关键在于证明可积函数的连续点足够多, 因此 f 在所有连续点上等于 0 就保证了积分为 0。Lebesgue 准则告诉我们可积函数几乎处处连续, 然而对于本题来说, 只需要证明 f 的连续点集在 $[a, b]$ 上稠密就足够了, 这样可以通过标志点集的任意选择使得 f 的 Riemann 和始终为 0。

下面依次证明: (1) f 的连续点集在 $[a, b]$ 上稠密, 即对 $[a, b]$ 的任意子区间 I , 存在 $\xi \in I$ 使得 f 在 ξ 处连续。(2) 若可积函数在其所有连续点上等于 0, 则其积分为 0。

(1) 设 f 在 $[a, b]$ 上的积分值为 I 。根据 Riemann 积分的定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists [a, b]$ 的划分 $P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ 和标志点集 $\{\xi_i\}_{i=1}^n$, 使得

$$I - \frac{\varepsilon}{4}(b-a) < \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i < I + \frac{\varepsilon}{4}(b-a) \quad (8.3.71)$$

由于标志点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 的任意性, 因此上述 Riemann 和的上下确界就满足相应的不等式

$$I - \frac{\varepsilon}{4}(b-a) \leq \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \leq I + \frac{\varepsilon}{4}(b-a) \quad (8.3.72)$$

其中 M_i, m_i 分别是 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上、下确界。记 $\omega_i := M_i - m_i$ 为 f 在该子区间上的振幅, 将上式中的两个和式相减, 就得到不等式

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{2}(b-a) < \varepsilon(b-a) \quad (8.3.73)$$

此时至少存在一个 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 使得 $\omega_i < \varepsilon_0$ 。

任取子区间 $[a_0, b_0] \subseteq [a, b]$, 则 $f \in \mathcal{R}[a_0, b_0]$ 。取 $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$, 使得 f 在 $[a_0, b_0]$ 上的某个子区间的振幅小于 $\frac{1}{2}$, 将它记为区间 $[a_1, b_1]$; 在必要时缩小该区间, 使得 $a_0 < a_1 < b_1 < b_0$ 。

接下来在 $[a_1, b_1]$ 上重复上述过程得到区间 $[a_2, b_2]$, 使得 f 在该区间上的振幅小于 $\frac{1}{4}$ 且 $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$ 。由此得到了一个区间套 $\{[a_n, b_n]\}_{n=0}^{+\infty}$, 且闭区间套的左端点严格增、右端点严格减, 根据闭区间套定理, $\exists \xi \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n] \subseteq [a, b]$ 。

我们接下来证明 f 在 ξ 处连续。 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$, 于是 $[a_N, b_N]$ 上 f 的振幅小于 ε 。由于 ξ 满足不等式 $a_N < \xi < b_N$, 故只要取 $\delta < \min\{\xi - a_N, b_N - \xi\}$ 即可保证

$$|x - \xi| < \delta \implies |f(x) - f(\xi)| \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon \quad (8.3.74)$$

即 f 在 ξ 处连续。由 $[a_0, b_0]$ 的任意性, f 在其任意子区间内都有连续点, 故 f 的连续点集在 $[a, b]$ 上稠密。

(2) 由于连续点稠密, 故对 $[a, b]$ 的任意划分, 在每一个子区间中总能取到连续点作为标志点。由于 f 在连续点处为 0, 因此 Riemann 和为 0, 作为 Riemann 和极限的定积分也必定等于 0。 \square

8.4 讲义习题

8.4.1 定积分的概念

例 8.4.1 (习题 7.1.5)

设 $g \in \mathcal{R}[a, b]$ 满足 $\int_a^b g(x) dx > 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 g 在 ξ 处连续且 $g(\xi) > 0$ 。

证明 采用反证法²。假设 $\forall \xi \in (a, b)$, 若 g 在 ξ 处连续则 $g(\xi) \leq 0$ 。由于 $g \in \mathcal{R}[a, b]$, 故

- g 有界, 即 $\exists M > 0$ 使得 $|g(x)| \leq M$ 。
- g 在 $[a, b]$ 上的间断点集为零测集, 即 $\forall \delta > 0$, 存在总长度为 δ 的有限开区间集 A 覆盖间断点集。

故 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, 则

$$\int_a^b g(x) dx = \int_A g(x) dx + \int_{[a, b] \setminus A} g(x) dx \leq \int_A M dx + \int_{[a, b] \setminus A} 0 dx \leq M\delta = \varepsilon \quad (8.4.1)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 可得

$$\int_a^b g(x) dx \leq 0 \quad (8.4.2)$$

与题设矛盾! 故假设不成立, 即 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 g 在 ξ 处连续且 $g(\xi) > 0$ 。 \square

² $\neg(A \wedge B) = A \rightarrow \neg B$ 。

另证 仍然采用反证法, 但是绕过 Lebesgue 法则。根据例 8.3.15, f 的连续点集在 $[a, b]$ 上稠密, 故对 $[a, b]$ 的任意划分, 在每一个子区间中总能取到连续点作为标志点。由于 f 在连续点处非正, 因此 Riemann 和非正, 作为 Riemann 和极限的定积分也必定非正, 与题设矛盾。□

例 8.4.2 (习题 7.1.6)

设 $f \in \mathcal{R}[0, \frac{\pi}{2}]$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f(x) \sin^n x \, dx = 0 \quad (8.4.3)$$

证明 由 $f \in \mathcal{R}[a, b]$ 知 f 有界, 故 $\exists M > 0$ 使得 $|f(x)| \leq M$ 。 $\forall \varepsilon > 0$, 注意到

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx \leq \int_0^{(\pi-\varepsilon)/2} \sin^n \frac{\pi-\varepsilon}{2} \, dx + \int_{(\pi-\varepsilon)/2}^{\pi/2} dx < \frac{\pi}{2} \cos^n \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \stackrel{?}{\leq} \varepsilon \quad (8.4.4)$$

取 n 满足下式即可

$$n \geq \frac{\ln(\varepsilon/\pi)}{\ln[\cos(\varepsilon/2)]} \quad (8.4.5)$$

此时

$$\left| \int_0^{\pi/2} f(x) \sin^n x \, dx \right| \leq M \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx < M\varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f(x) \sin^n x \, dx = 0 \quad (8.4.6)$$

□

另证 实际上, 由 Wallis 公式可得

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \in \text{even} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \in \text{odd} \end{cases} \quad (8.4.7)$$

令 $a_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$, 则

$$a_n a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0, \quad a_{2n} = \exp \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{1}{2k} \right) \leq \exp \sum_{k=1}^n -\frac{1}{2k} \rightarrow 0 \quad (8.4.8)$$

亦即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ 。因此

$$\left| \int_0^{\pi/2} f(x) \sin^n x \, dx \right| \leq M \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx \leq \frac{M\pi}{2} \frac{(n-1)!!}{n!!} \rightarrow 0 \quad (8.4.9)$$

□

例 8.4.3 (习题 7.1.8)

设 $f: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ 严格单调, $g = f^{-1}$ 。讨论 $\int_a^b f(x) \, dx$ 和 $\int_\alpha^\beta g(y) \, dy$ 之间的关系, 并证明你的结论。

证明 本题与 8.3.3 类似, 画图可知结论为

- f 严格增: $\int_a^b f(x) dx + \int_\alpha^\beta g(y) dy = bf(b) - af(a) = b\beta - a\alpha$
- f 严格减: $\int_a^b f(x) dx - \int_\alpha^\beta g(y) dy = bf(b) - af(a) = b\alpha - a\beta$

换元法需要 f 可微; 若 f 仅仅可积, 我们需要通过定义来证明。

对 $[a, b]$ 的任意划分 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 。若 f 严格增, 则 $f(P): \alpha = f(x_0) < f(x_1) < \cdots < f(x_n) = \beta$ 亦是 $[\alpha, \beta]$ 的划分, 因此两者的 Riemann 和满足

$$\begin{aligned} & S(f, P, \{x_k\}_{k=1}^n) + S(f^{-1}, f(P), \{f(x_k)\}_{k=0}^{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n [f(x_k)(x_k - x_{k-1}) + f^{-1}(f(x_{k-1}))(f(x_k) - f(x_{k-1}))] \\ &= \sum_{k=1}^n [x_k f(x_k) - x_{k-1} f(x_{k-1})] = bf(b) - af(a) \end{aligned} \quad (8.4.10)$$

令 $\|P\| \rightarrow 0$, 即得

$$\int_a^b f(x) dx + \int_\alpha^\beta g(y) dy = bf(b) - af(a) = b\beta - a\alpha \quad (8.4.11)$$

若 f 严格减, 则 $f(P): \alpha = f(x_0) > f(x_1) > \cdots > f(x_n) = \beta$ 亦是 $[\alpha, \beta]$ 的划分, 因此两者的 Riemann 和满足

$$\begin{aligned} & S(f, P, \{x_k\}_{k=1}^n) - S(f^{-1}, f(P), \{f(x_k)\}_{k=0}^{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n [f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - f^{-1}(f(x_{k-1}))(f(x_{k-1}) - f(x_k))] \\ &= \sum_{k=1}^n [x_k f(x_k) - x_{k-1} f(x_{k-1})] = bf(b) - af(a) \end{aligned} \quad (8.4.12)$$

令 $\|P\| \rightarrow 0$, 即得

$$\int_a^b f(x) dx - \int_\alpha^\beta g(y) dy = bf(b) - af(a) = b\alpha - a\beta \quad (8.4.13)$$

□

8.4.2 积分计算

例 8.4.4 (习题 7.4.1 节选)

计算以下定积分:

- (1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$, 其中 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 。 (2) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} dx$, 其中 $m \in \mathbb{N}^*$ 。

解 (1) 当 $m = n$ 时, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} \, dx = \pi \quad (8.4.14)$$

当 $m \neq n$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned} \quad (8.4.15)$$

因此

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \pi \delta_{mn} \quad (8.4.16)$$

(2) 注意到

$$\sin(2m-1)x - \sin x = \sum_{k=1}^{m-1} [\sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x] = 2 \sin x \sum_{k=1}^{m-1} \cos 2kx \quad (8.4.17)$$

因此

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} \, dx = \int_0^{\pi/2} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \cos 2kx \right) \, dx = \frac{\pi}{2} \quad (8.4.18)$$

□

补充 同时注意到

$$\sin 2mx = \sum_{k=0}^{m-1} [\sin(2k+2)x - \sin(2k)x] = 2 \sin x \sum_{k=0}^{m-1} \cos(2k+1)x \quad (8.4.19)$$

因此

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2mx}{\sin x} \, dx = 2 \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^{\pi/2} \cos(2k+1)x \, dx = 2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad (8.4.20)$$

例 8.4.5 (习题 7.4.2 节选)

计算以下定积分:

(1) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

(3) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx$

(2) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} \, dx$

(4) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \, dx$

解 (1) 令 $x = a \cos \theta$, 则

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi}{4} a^2 \quad (8.4.21)$$

本题也可以直接通过几何意义得到答案。

(2) 令 $x = \sec \theta$, 则

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx = \int_0^{\arccos \frac{1}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{3} \sin^3 \theta \Big|_0^{\arccos \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{8} \quad (8.4.22)$$

(3) 令 $x = \pi - t$, 则

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = -\frac{\pi}{2} \arctan \cos t \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4} \quad (8.4.23)$$

(4) 令 $x = \tan \theta$, 则

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan \theta) d\theta \stackrel{\varphi=\pi/4-\theta}{=} \int_0^{\pi/4} \ln \left(1 + \frac{1 - \tan \varphi}{1 + \tan \varphi} \right) d\varphi \quad (8.4.24)$$

因此

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \ln 2 d\theta = \frac{\pi}{8} \ln 2 \quad (8.4.25)$$

□

第9次习题课 定积分的应用

2023年12月11日, 2024年12月5日, 2025年12月9日。本节对应微积分A(1)第10次习题课的内容。

9.1 知识点复习

9.1.1 平面区域的面积

在一元微积分中, 我们可以计算以下类型的平面区域的面积:

(1) 设 $y_1, y_2 \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ 满足 $y_1(x) \leq y_2(x)$, 则 y_1, y_2 围成的有界区域的面积为

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (y_2(x) - y_1(x)) dx \quad (9.1.1)$$

(2) 对于由参数方程确定的简单闭曲线 $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$, 记 $t \mapsto (x(t), y(t))$, 其围成的有界区域的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{\gamma} x dy = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t) dt \\ &= - \int_{\gamma} y dx = - \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} \mathbf{r} \wedge d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r}(t) \wedge \mathbf{r}'(t) dt \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

上述积分是有向积分, 曲线 γ 的参数增加方向需要满足区域的自然正向, 即: 在区域边界按参数增加方向前进时, 区域位于左手一侧。

(3) 平面极坐标系下,

$$S = \frac{1}{2} \int_{\gamma} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(t)^2 \theta'(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)^2 d\theta \quad (9.1.3)$$

在 (2) 中的第三个公式中代入 $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$ 、 $y(t) = r(t) \sin \theta(t)$ 即可得到上式。

9.1.2 曲线的弧长

正则曲线 $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)$, 满足 $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0}$, 则其弧长为

$$L = \int_{\gamma} dl = \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{x}'(t)\| dt \quad (9.1.4)$$

(1) 在空间直角坐标系下,

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2} = \sqrt{x_1'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2} dt \quad (9.1.5)$$

(2) 在平面极坐标系下, 我们有 $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$, $y(t) = r(t) \sin \theta(t)$, 则

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \theta'(t)^2} dt = \sqrt{dr^2 + (r d\theta)^2} \quad (9.1.6)$$

(3) 在空间柱坐标系下, 我们有 $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$, $y(t) = r(t) \sin \theta(t)$, $z(t) = z(t)$, 则

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \theta'(t)^2 + z'(t)^2} dt \\ &= \sqrt{dr^2 + (r d\theta)^2 + dz^2} \end{aligned} \quad (9.1.7)$$

(4) 在空间球坐标系下, 我们有 $x(t) = r(t) \sin \theta(t) \cos \phi(t)$, $y(t) = r(t) \sin \theta(t) \sin \phi(t)$, $z(t) = r(t) \cos \theta(t)$, 则

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \theta'(t)^2 + r(t)^2 \sin^2 \theta(t) \phi'(t)^2} dt \\ &= \sqrt{dr^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2} \end{aligned} \quad (9.1.8)$$

以上公式可以借助图像直观地理解, 如图 9.1.1 所示。

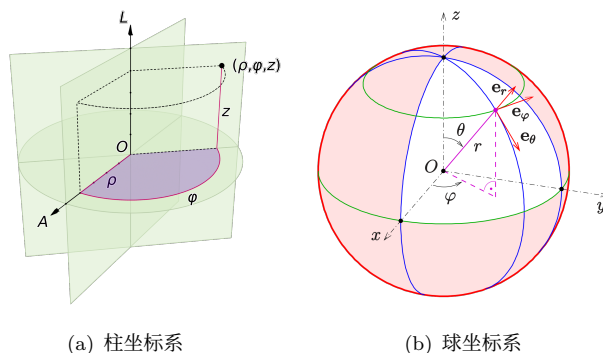


图 9.1.1: 三维空间中两种常用的正交曲线坐标系

9.1.3 曲线的曲率

正则曲线的弧长参数定义为

$$l(t) := \int_{\alpha}^t \|\mathbf{x}'(s)\| ds \quad (9.1.9)$$

于是

$$l'(t) = \|\mathbf{x}'(t)\| > 0 \quad (9.1.10)$$

因此 $l(t)$ 有 \mathcal{C}^1 的反函数 $t(l)$, 用弧长参数表示的曲线方程 $\tilde{\mathbf{x}}(l) := \mathbf{x}(t(l))$ 满足

$$\tilde{\mathbf{x}}'(l) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}, \quad \|\tilde{\mathbf{x}}'(l)\| = 1, \quad \langle \tilde{\mathbf{x}}'(l), \tilde{\mathbf{x}}''(l) \rangle = 0 \quad (9.1.11)$$

这是一个以单位速率运动的曲线, 其加速度与速度正交, 是曲线的主法向量。曲线的曲率定义为

$$\kappa := \|\tilde{\mathbf{x}}''(l)\| = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3} \quad (9.1.12)$$

9.1.4 空间曲线的挠率

设空间正则曲线 $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{C}^3$, 且 $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0}$ 。令曲线的弧长参数为 l (即 $dl = \|\mathbf{x}'(t)\| dt$), 并记弧长参数表示的曲线为 $\tilde{\mathbf{x}}(l) = \mathbf{x}(t(l))$, 则定义单位切向量、主法向量与副法向量 (双法向量) 为

$$\mathbf{T}(l) = \tilde{\mathbf{x}}'(l), \quad \mathbf{N}(l) = \frac{\mathbf{T}'(l)}{\|\mathbf{T}'(l)\|}, \quad \mathbf{B}(l) = \mathbf{T}(l) \times \mathbf{N}(l). \quad (9.1.13)$$

此空间曲线的曲率与挠率由 Frenet-Serret 公式给出:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'(l) = \kappa(l) \mathbf{N}(l), \\ \mathbf{N}'(l) = -\kappa(l) \mathbf{T}(l) + \tau(l) \mathbf{B}(l), \\ \mathbf{B}'(l) = -\tau(l) \mathbf{N}(l), \end{cases} \quad (9.1.14)$$

其中 $\kappa(l) = \|\mathbf{T}'(l)\|$ 为曲率, $\tau(l) = -\langle \mathbf{B}'(l), \mathbf{N}(l) \rangle$ 为挠率。

挠率的几何意义为: 挠率 $\tau(l)$ 度量曲线偏离瞬时振子面 (由 \mathbf{T}, \mathbf{N} 张成的平面) 的快慢; 若 $\tau \equiv 0$, 则曲线局部位于同一平面上。符号反映曲线的“手性” (即右、左手螺旋性质)。

若采用一般参数 t 而非弧长参数 l , 挠率的计算公式为 (在 $\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' \neq \mathbf{0}$, 即 $\kappa \neq 0$ 处成立):

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \cdot \mathbf{x}'''(t)}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2} = \frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2} \quad (9.1.15)$$

例 9.1.1

计算螺线 $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ 的曲率与挠率。

解 将螺线的参数方程 $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ 代入计算公式中可得

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (9.1.16)$$

□

9.1.5 旋转体与旋转面

平面封闭曲线 $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 位于 x 轴的一侧（包括 x 轴本身），它绕 x 轴旋转一周得到曲面 Σ 和旋转体 Ω ，则旋转面（即旋转体侧面）面积为

$$A = \int_{\gamma} 2\pi y \, dl = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt \quad (9.1.17)$$

旋转体体积为

$$V = - \int_{\gamma} \pi y^2 \, dx = -\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)^2 x'(t) \, dt \quad (9.1.18)$$

上述积分中的符号来自于曲线定向。

祖暅原理：沿一个方向把 Ω 切割成与 x 轴垂直的一系列薄片，其近似为柱体，设截面面积为 $A(x)$ 、薄体厚度为 dx ，则薄体体积为 $dV(x) = A(x) dx$ ，因此

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} dV(x) = \int_{\alpha}^{\beta} A(x) \, dx \quad (9.1.19)$$

曲面面积的计算是一个很微妙的问题，我们将在多元微积分时有更深入的（但仍是初等的）讨论。

9.1.6 质心与加权平均

设 $X \in [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ 为连续的随机变量，其概率密度函数为 f ，则有

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx = 1 \quad (9.1.20)$$

定义分布函数 $F: [\alpha, \beta] \rightarrow [0, 1]$ 为

$$F(x) := \int_{\alpha}^x f(t) \, dt, \quad x \in [\alpha, \beta] \quad (9.1.21)$$

则

$$dF(x) = F'(x) \, dx = f(x) \, dx \quad (9.1.22)$$

反映了随机变量 X 落在 $[x, x + dx]$ 的概率。

设 $\phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ，则 $\phi(X)$ 的期望为

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x) \, dF(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x) f(x) \, dx \quad (9.1.23)$$

取 X 为几何体的质量， ϕ 为恒等映射，则几何体的质心为

$$x_c := \frac{\int x \, dm}{\int dm} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x \rho(x) \, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} \rho(x) \, dx} =: \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) \, dx \quad (9.1.24)$$

其中 ρ 为线密度函数 (单位长度几何体的质量), 权函数 (概率密度函数) f 的定义为线密度函数的归一化, 即

$$f(x) := \frac{\rho(x)}{\int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) dt} \quad (9.1.25)$$

以上概念容易推广到高维空间中。

9.2 雨课堂作业

例 9.2.1 (作业第 1 题)

求以下曲线的弧长和曲率:

- (1) $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, 其中 f 是 \mathcal{C}^2 函数;
- (2) 极坐标下 $r = r(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, r 是 \mathcal{C}^2 函数。

解 (1) 由弧长公式可得

$$L = \int_{\gamma} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (9.2.1)$$

曲率为

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x)\|}{\|\mathbf{r}'(x)\|^3} = \frac{\|(1, f'(x)) \times (0, f''(x))\|}{\|(1, f'(x))\|^3} = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}} \quad (9.2.2)$$

(2) 由弧长公式可得

$$L = \int_{\gamma} \sqrt{dr^2 + (r d\theta)^2} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'(\theta))^2 + r(\theta)^2} d\theta \quad (9.2.3)$$

曲率为

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}'(\theta) \times \mathbf{r}''(\theta)\|}{\|\mathbf{r}'(\theta)\|^3} = \frac{|r(\theta)^2 + 2(r'(\theta))^2 - r(\theta)r''(\theta)|}{[(r'(\theta))^2 + r(\theta)^2]^{3/2}}, \quad \mathbf{r}(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \quad (9.2.4)$$

直接求导计算曲率的运算量较大, 另一种方法是利用单位向量。注意到

$$\begin{cases} \hat{r} = (\cos \theta, \sin \theta) \\ \hat{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta) \end{cases} \implies \frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r} \quad (9.2.5)$$

因此

$$\mathbf{r}' = (r\hat{r})' = r'\hat{r} + r\hat{\theta}, \quad \mathbf{r}'' = (r'\hat{r} + r\hat{\theta})' = (r'' - r)\hat{r} + 2r'\hat{\theta} \quad (9.2.6)$$

由此可得

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| = |r' \cdot 2r' - r(r'' - r)| = |r^2 + 2(r')^2 - rr''|, \quad \|\mathbf{r}'\| = \sqrt{(r')^2 + r^2} \quad (9.2.7)$$

故曲率为

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3} = \frac{|r^2 + 2(r')^2 - rr''|}{[(r')^2 + r^2]^{3/2}} \quad (9.2.8)$$

□

例 9.2.2 (作业第 2 题)

求椭圆 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ ($A > 0, AC > B^2$) 所围平面有界区域的面积。(提示: 用平面极坐标)

解 将椭圆方程化为极坐标形式可得

$$Ar^2 \cos^2 \theta + 2Br^2 \sin \theta \cos \theta + Cr^2 \sin^2 \theta = 1 \implies r(\theta)^2 = \frac{1}{A \cos^2 \theta + 2B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta} \quad (9.2.9)$$

由面积公式可得椭圆所围有界区域的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} r(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{A \cos^2 \theta + 2B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{A + C + (A - C) \cos 2\theta + 2B \sin 2\theta} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} \cos(2\theta - \varphi)} \stackrel{\text{periodic}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} \cos t} \end{aligned} \quad (9.2.10)$$

由于 $AC > B^2$, 故 $A + C > \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}$ 。利用以下积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a + b \cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad |a| > |b| \quad (9.2.11)$$

可得

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{(A + C)^2 - [(A - C)^2 + 4B^2]}} = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}} \quad (9.2.12)$$

□

例 9.2.3 (作业第 3 题)

求星形线 $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a^{2/3}$ ($a > 0$) 的弧长、所围有界区域的面积。

解 仅考虑第一象限的部分 (即 $x, y \geq 0$) 的弧长、面积, 随后乘以 4 即可。由题意可知

$$y = a \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{2/3} \right]^{3/2}, \quad y'(x) = - \left(\frac{x}{a} \right)^{-1/3} \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{2/3} \right]^{1/2}, \quad x \in [0, a] \quad (9.2.13)$$

计算可得

$$L = 4 \int_0^a \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = 4 \int_0^a \left(\frac{x}{a} \right)^{-1/3} dx = 4 \cdot \frac{3a}{2} = 6a \quad (9.2.14)$$

$$A = 4 \int_0^a y(x) dx = 4a \int_0^a \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{2/3} \right]^{3/2} dx \stackrel{t = \sqrt[3]{\frac{x}{a}}}{=} 12a^2 \int_0^1 (1 - t^2)^{3/2} t^2 dt = 12a^2 \cdot \frac{\pi}{32} = \frac{3\pi a^2}{8} \quad (9.2.15)$$

□

另解 另一种做法是利用星形线的参数方程:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos^3 t, & y(t) = a \sin^3 t, \\ x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t, & y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2] \quad (9.2.16)$$

计算可得

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 12a \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = 6a \quad (9.2.17)$$

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt = 6a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3\pi a^2}{8} \quad (9.2.18)$$

□

例 9.2.4 (作业第 4 题)

求旋轮线 $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的弧长、以及它和 x 轴所围成的有界区域的面积。

解 由题意可知

$$x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (9.2.19)$$

计算可得

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 8 \quad (9.2.20)$$

$$A = \int_{\gamma} y dx = \int_0^{2\pi} x'(t)y(t) dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = 3\pi \quad (9.2.21)$$

□

例 9.2.5 (作业第 5 题)

求双纽线 $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ 的弧长、所围有界区域的面积。

解 仅考虑第一象限的部分 (即 $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$) 的弧长、面积, 随后乘以 4 即可。由题意可知

$$r(\theta) = a\sqrt{2 \cos 2\theta}, \quad r'(\theta) = -\frac{\sqrt{2}a \sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad (9.2.22)$$

计算可得

$$L = 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{(r'(\theta))^2 + r(\theta)^2} d\theta = 4a \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{2 \sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} + 2 \cos 2\theta} d\theta \quad (9.2.23)$$

$$\stackrel{t=2\theta}{=} 2\sqrt{2}a \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\cos t}} = 4aK\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r(\theta)^2 d\theta = 2a^2 \int_0^{\pi/4} 2 \cos 2\theta d\theta = 2a^2 \quad (9.2.24)$$

其中 $K(k)$ 为第一类完全椭圆积分, $K\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1.85407$ 。

□

例 9.2.6 (作业第6题)

设 $A > \frac{1}{2}$, 记 $L(A)$ 为抛物线 $y = Ax^2$ 位于圆 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 的内部的部分的弧长。

- (1) 求极限: $\lim_{A \rightarrow +\infty} L(A)$;
- (2) 是否存在 $A > \frac{1}{2}$ 使得 $L(A) > 4$?
- (3) 有多少个 A 使得 $L(A) = 4$?

解 (1) 由题意可知抛物线在圆内 (包括边界) 的部分满足

$$x^2 + (Ax^2 - 1)^2 \leq 1 \implies x^2(1 - 2A + A^2x^2) \leq 0 \implies |x| \leq x_A := \frac{\sqrt{2A-1}}{A} \quad (9.2.25)$$

曲线的弧长为

$$L(A) = 2 \int_0^{x_A} \sqrt{1 + (2Ax)^2} dx = \sqrt{16 - \frac{14}{A} + \frac{3}{A^2}} + \frac{1}{2A} \ln(2\sqrt{2A-1} + \sqrt{8A-3}) \quad (9.2.26)$$

显然有

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} L(A) = 4 \quad (9.2.27)$$

(2) 对 L 求导可得

$$L'(A) = \frac{1}{2A^2} \left[2\sqrt{\frac{8A-3}{2A-1}} - \ln(2\sqrt{2A-1} + \sqrt{8A-3}) \right] \quad (9.2.28)$$

令 $t = 2\sqrt{2A-1}$, 考虑

$$f(t) := 4\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} - \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}), \quad t > 0 \quad (9.2.29)$$

显然 f 严格减, 且有 $f(0) = +\infty$, $f(+\infty) = -\infty$, 故 $\exists t_0 \in (0, +\infty)$ 使得 $f(t_0) = 0$ 。

令 $A_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t_0^2}{4} \right)$, 则 L 在 $(\frac{1}{2}, A_0)$ 上严格增, 在 $(A_0, +\infty)$ 上严格减, 最终趋于 4。因此 $L(A_0) > L(+\infty) = 4$, 故存在 $A > \frac{1}{2}$ 使得 $L(A) > 4$ 。

(3) 由于 $L(\frac{1}{2}) = 0 < 4$, $L(A_0) > 4$ 且 L 在 $(\frac{1}{2}, A_0)$ 上严格增, 故 $\exists! A_1 \in (\frac{1}{2}, A_0)$ 使得 $L(A_1) = 4$, 即存在唯一 A 使得 $L(A) = 4$ 。□

例 9.2.7 (作业第7题)

设 f 是区间 $[0, +\infty)$ 上的正值连续函数, 记

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x tf(t) dt}{\int_0^x f(t) dt} \quad (9.2.30)$$

证明: φ 严格增。

证明 不难验证 φ 可微, 直接求导可得

$$\varphi'(x) = \frac{(\int_0^x f(t) dt)(xf(x)) - (\int_0^x tf(t) dt)f(x)}{(\int_0^x f(t) dt)^2} = \frac{f(x)}{(\int_0^x f(t) dt)^2} \int_0^x (x-t)f(t) dt \quad (9.2.31)$$

由于 f 为正值函数, 且 $x-t > 0, \forall t \in [0, x)$, 因此 $\varphi'(x) > 0$, 即 φ 严格增。 \square

另证 考虑本题的物理意义。设 $f(x)$ 表示杆 $[0, +\infty)$ 在点 x 处的线密度, $m(a, b), x_C(a, b)$ 分别表示杆 $[a, b]$ 的质量、质心, 则 $\varphi(x) = x_C(0, x)$ 。设 $0 \leq a < b$, 由杠杆原理可得

$$m(0, a) \cdot x_C(0, a) + m(a, b) \cdot x_C(a, b) = m(0, b) \cdot x_C(0, b) \quad (9.2.32)$$

显然有

$$x_C(0, a) < a < x_C(a, b) \quad (9.2.33)$$

因此

$$\varphi(b) = x_C(0, b) > \frac{m(0, a)}{m(0, b)} x_C(0, a) + \frac{m(a, b)}{m(0, b)} x_C(0, a) = x_C(0, a) = \varphi(a) \quad (9.2.34)$$

\square

例 9.2.8 (作业第 8 题)

已知函数 f 满足 $f(1) = 1$, 且

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f(x)^2} \quad (9.2.35)$$

证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}$ 。

证明 由 $f'(x) > 0$ 知 f 在 $[1, +\infty)$ 上严格增, 故 $f(x) \geq f(1) = 1$ 。放缩可得

$$f(x) = f(1) + \int_1^x \frac{1}{t^2 + f(t)^2} dt \leq 1 + \int_1^x \frac{1}{t^2 + 1} dt = 1 + \arctan t \Big|_1^x = 1 + \arctan x - \frac{\pi}{4} < 1 + \frac{\pi}{4} \quad (9.2.36)$$

因此 f 有上界, 且严格增, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}$ 。 \square

注 以下内容与课程要求无关。我们尝试使用一些技巧探讨 f 的更多性质。记 $L := \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 由于直接求解 $f(x)$ 较为困难, 考虑利用反函数方法。设 $y = f(x)$, 其中 $x > 0, y > 0$, 则 $x = f^{-1}(y)$ 满足

$$\frac{dx}{dy} = x^2 + y^2, \quad x(1) = 1 \quad (9.2.37)$$

这是 Riccati 方程, 令 $x(y) = \frac{u'(y)}{u(y)}$, 则 $u(y)$ 满足二阶线性微分方程

$$u''(y) + y^2 u(y) = 0, \quad u(1) + u'(1) = 0 \quad (9.2.38)$$

考虑换元 $(y, u) \mapsto (t, v)$, 其中 $t = \frac{1}{2}y^2$ 、 $v = \frac{u}{\sqrt{y}}$, 亦即 $y = \sqrt{2t}$ 、 $u = v\sqrt{2t}$, 由此可得

$$\begin{aligned}\frac{du}{dy} &= \frac{dt}{dy} \frac{d(v\sqrt{2t})}{dt} = \sqrt{2t} \left(v'(t)\sqrt{2t} + \frac{v(t)}{2\sqrt{(2t)^3}} \right) = \frac{v(t) + 4tv'(t)}{2\sqrt{2t}} \\ \frac{d^2u}{dy^2} &= \frac{dt}{dy} \frac{d}{dt} \frac{v(t) + 4tv'(t)}{2\sqrt{2t}} = \frac{16t^2v''(t) + 16tv'(t) - v(t)}{4(2t)^{3/4}}\end{aligned}\quad (9.2.39)$$

代入计算可得

$$\begin{aligned}\left[\frac{du}{dy} + u(y) \right]_{y=1} &= \left[\frac{v(t) + 4tv'(t)}{2\sqrt{2t}} + v(t)\sqrt{2t} \right]_{t=1/2} = v' \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2}v \left(\frac{1}{2} \right) = 0 \\ \frac{d^2u}{dy^2} + y^2u &= \frac{16t^2v''(t) + 16tv'(t) - v(t)}{4(2t)^{3/4}} + 2tv(t)\sqrt{2t} = \frac{4}{(2t)^{3/4}} \left[t^2v''(t) + tv'(t) + \left(t^2 - \frac{1}{16} \right) v(t) \right]\end{aligned}\quad (9.2.40)$$

亦即 $v(t)$ 满足 $\frac{1}{4}$ 阶 Bessel 方程

$$t^2v''(t) + tv'(t) + \left(t^2 - \frac{1}{16} \right) v(t) = 0 \implies v(t) = c_1J_{1/4}(t) + c_2J_{-1/4}(t)\quad (9.2.41)$$

因此

$$u(y) = \sqrt{y} \left[c_1J_{1/4} \left(\frac{y^2}{2} \right) + c_2J_{-1/4} \left(\frac{y^2}{2} \right) \right]\quad (9.2.42)$$

代入 $t_0 = \frac{1}{2}$ 处的初始条件, 利用恒等式 $J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z}J_\nu(z)$ 可得

$$\begin{aligned}0 &= v' \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2}v \left(\frac{1}{2} \right) = c_1 \left[J'_{1/4} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2}J_{1/4} \left(\frac{1}{2} \right) \right] + c_2 \left[J'_{-1/4} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2}J_{-1/4} \left(\frac{1}{2} \right) \right] \\ &= c_1 \left[J_{-3/4} \left(\frac{1}{2} \right) + J_{1/4} \left(\frac{1}{2} \right) \right] + c_2 \left[J_{-5/4} \left(\frac{1}{2} \right) + 2J_{-1/4} \left(\frac{1}{2} \right) \right]\end{aligned}\quad (9.2.43)$$

由题设可知 $y(+\infty) = L \in (1, 2)$, 故 $x(L)$ 发散, 因此 $u(L) = 0$, 由此可得

$$u(L) = \sqrt{L} \left[c_1J_{1/4} \left(\frac{L^2}{2} \right) + c_2J_{-1/4} \left(\frac{L^2}{2} \right) \right] = 0 \implies \frac{J_{1/4} \left(\frac{L^2}{2} \right)}{J_{-1/4} \left(\frac{L^2}{2} \right)} = -\frac{c_2}{c_1} = \frac{J_{-5/4} \left(\frac{1}{2} \right) + 2J_{-1/4} \left(\frac{1}{2} \right)}{J_{-3/4} \left(\frac{1}{2} \right) + J_{1/4} \left(\frac{1}{2} \right)}\quad (9.2.44)$$

因此 $t = \frac{L^2}{2}$ 是函数 $g(t) := \frac{J_{1/4}(t)}{J_{-1/4}(t)}$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 2)$ 内的 (唯一) 零点, 数值计算可得 $t \approx 1.49549$, 因此 $L \approx 1.72944$.

我们下面尝试求出 f 在 $x = +\infty$ 处的渐近展开. 令 $s = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$, 代入可得

$$\frac{df}{ds} = \frac{dx}{ds} \frac{df}{dx} = -\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{s^2} + f^2} = -\frac{1}{1 + s^2f^2} \implies \left. \frac{df}{ds} \right|_{s=0} = -1\quad (9.2.45)$$

求导可得

$$\frac{d^2f}{ds^2} = \frac{2sf^2 + 2s^2f \frac{df}{ds}}{(1 + s^2f^2)^2} \implies \left. \frac{d^2f}{ds^2} \right|_{s=0} = 0\quad (9.2.46)$$

继续求导、代入、计算可得

$$\left. \frac{d^3f}{ds^3} \right|_{s=0} = 2L^2, \quad \left. \frac{d^4f}{ds^4} \right|_{s=0} = -12L, \quad \left. \frac{d^5f}{ds^5} \right|_{s=0} = 24(1 - L^4), \quad \left. \frac{d^6f}{ds^6} \right|_{s=0} = 560L^3, \quad \dots\quad (9.2.47)$$

因此 f 在 $x = +\infty$ 处的渐近展开为

$$f(x) = L - \frac{1}{x} + \frac{L^2}{3x^3} - \frac{L}{2x^4} + \frac{1-L^4}{5x^5} + \frac{7L^3}{9x^6} + \dots \quad (9.2.48)$$

例 9.2.9 (作业第 9 题)

设 f 是 \mathbb{R} 上的凸函数, φ 是 \mathbb{R} 上的连续函数。证明: $\forall a > 0$, 都有

$$\frac{1}{a} \int_0^a f(\varphi(t)) dt \geq f\left(\frac{1}{a} \int_0^a \varphi(t) dt\right) \quad (9.2.49)$$

证明 此即 Jensen 不等式的积分形式。设

$$\bar{\varphi} := \frac{1}{a} \int_0^a \varphi(t) dt \quad (9.2.50)$$

由凸函数的定义可知, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x) \geq f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$ 。取 $x = \varphi(t)$ 、 $x_0 = \bar{\varphi}$, 则

$$f(\varphi(t)) \geq f(\bar{\varphi}) + f'_+(\bar{\varphi})(\varphi(t) - \bar{\varphi}) \quad (9.2.51)$$

两边对 t 从 0 到 a 积分并除以 a , 可得

$$\frac{1}{a} \int_0^a f(\varphi(t)) dt \geq f(\bar{\varphi}) + f'_+(\bar{\varphi}) \left(\frac{1}{a} \int_0^a \varphi(t) dt - \bar{\varphi} \right) = f(\bar{\varphi}) = f\left(\frac{1}{a} \int_0^a \varphi(t) dt\right) \quad (9.2.52)$$

□

证明 另一种思路是利用 Riemann 和与离散形式的 Jensen 不等式。设 $P: 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = a$ 为 $[0, a]$ 的任意划分, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ 为任意标志点, 则

$$\frac{1}{a} \int_0^a f(\varphi(t)) dt = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\varphi(\xi_k)) \frac{x_k - x_{k-1}}{a} \geq \lim_{\|P\| \rightarrow 0} f\left(\sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{a}\right) = f\left(\frac{1}{a} \int_0^a \varphi(t) dt\right) \quad (9.2.53)$$

□

例 9.2.10 (作业第 10 题)

(1) 设 $f \in \mathcal{C}^1[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ 。证明:

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{4} \max_{x \in [0, 1]} |f'(x)| \quad (9.2.54)$$

(2) 设 $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$, $f(a) = 0$ 。证明:

$$\max_{x \in [a, b]} f(x)^2 \leq (b-a) \int_a^b (f'(x))^2 dx \quad (9.2.55)$$

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx \quad (9.2.56)$$

证明 (1) 记 $M := \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|$. $\forall x \in (0,1)$, 由 Lagrange 中值定理知 $\exists \xi \in (0,x)$ 使得

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = |f'(\xi)| \leq M \implies |f(x)| \leq Mx \quad (9.2.57)$$

同理可得 $\exists \xi \in (x,1)$ 使得

$$\left| \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \right| = |f'(\xi)| \leq M \implies |f(x)| \leq M(1-x) \quad (9.2.58)$$

因此

$$|f(x)| \leq M \min\{x, 1-x\} \quad (9.2.59)$$

直接积分, 利用三角不等式可得

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx \leq M \int_0^{1/2} x dx + M \int_{1/2}^1 (1-x) dx = \frac{M}{4} = \frac{1}{4} \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| \quad (9.2.60)$$

(2) 由 Cauchy 不等式可得

$$f(x)^2 = \left(\int_a^x 1 \cdot f'(t) dt \right)^2 \leq (x-a) \int_a^x (f'(t))^2 dt \leq (x-a) \int_a^b (f'(t))^2 dt \leq (b-a) \int_a^b (f'(t))^2 dt \quad (9.2.61)$$

因此

$$\max_{x \in [a,b]} f(x)^2 \leq (b-a) \int_a^b (f'(x))^2 dx \quad (9.2.62)$$

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq \int_a^b (x-a) dx \int_a^b (f'(t))^2 dt = \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (f'(t))^2 dt \quad (9.2.63)$$

□

注 第(2)问的第二个不等式可以加强为: 设 $f \in \mathcal{C}^1[a,b]$ 且满足 $f(a) = 0$, 则有

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq \frac{4(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b (f'(x))^2 dx \quad (9.2.64)$$

其中等号成立当且仅当 $f(x) = C \sin \frac{\pi(x-a)}{2(b-a)}$ 或 $f(x) = C \cos \frac{\pi(x-a)}{2(b-a)}$, C 为常数。

不妨设 $[a,b] = [0, \frac{\pi}{2}]$, 证明可利用例 10.2.1 中的 Wirtinger 不等式: 设 $g \in \mathcal{C}^1[0, 2\pi]$ 且满足 $g(0) = g(2\pi)$, $\int_0^{2\pi} g(x) dx = 0$, 则有

$$\int_0^{2\pi} g(x)^2 dx \leq \int_0^{2\pi} (g'(x))^2 dx \quad (9.2.65)$$

只需令

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ f(\pi - x), & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ -f(x - \pi), & x \in (\pi, \frac{3\pi}{2}] \\ -f(2\pi - x), & x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases} \quad (9.2.66)$$

如有必要, 可添加光滑子使得 g 在 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 处可微, 则

$$\int_0^{\pi/2} f(x)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} g(x)^2 dx \leq \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (g'(x))^2 dx = \int_0^{\pi/2} (f'(x))^2 dx \quad (9.2.67)$$

9.3 补充习题

例 9.3.1

设 γ 是双纽线在右半平面中的一支, 其极坐标方程为

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \quad (9.3.1)$$

求:

- (1) 该曲线的弧长;
- (2) 该曲线所围成的有界区域的面积;
- (3) 该曲线绕 x 轴旋转一周所围成的空间有界区域的体积;
- (4) 该曲线绕 x 轴旋转一周所形成的旋转面的面积;
- (5) 该曲线所围成的平面有界区域绕 y 轴一周所形成的空间有界区域的体积;
- (6) 该曲线绕 y 轴旋转一周所形成的旋转面的面积。

解 (1)

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{dr^2 + (r d\theta)^2} = \sqrt{\left(\frac{d(r^2)}{2r}\right)^2 + (r d\theta)^2} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \\ L &= \int dl = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = 2a \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\sin^2 \theta}} \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

令 $\sqrt{2} \sin \theta = \sin \phi$, 则

$$\sqrt{2} \cos \theta d\theta = \cos \phi d\phi \implies d\theta = \frac{\cos \phi}{\sqrt{2} \cos \theta} d\phi = \frac{\cos \phi}{\sqrt{2 - \sin^2 \phi}} d\phi \quad (9.3.3)$$

因此

$$L = 2a \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos \phi} \cdot \frac{\cos \phi}{\sqrt{2 - \sin^2 \phi}} d\phi = \sqrt{2}a \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \phi}} = \sqrt{2}aK\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (9.3.4)$$

(2)

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r(\theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = a^2 \quad (9.3.5)$$

(3)

$$V = - \int_{\gamma} \pi y^2 dx = \pi a^3 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta \sin^2 \theta \frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = \pi a^3 \left[\frac{\ln(\sqrt{2} + 1)}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{12} \right] \quad (9.3.6)$$

(4)

$$A = \int_{\gamma} 2\pi y dl = 2\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \sin \theta d\theta = 2\pi a^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (9.3.7)$$

(5)

$$V_y = \int_{\gamma} \pi x^2 dy = 2\pi a^3 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta \cos^2 \theta \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{8} \pi^2 a^3 \quad (9.3.8)$$

(6)

$$A_y = \int_{\gamma} 2\pi x dl = 2 \cdot 2\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \cos \theta d\theta = 2\sqrt{2}\pi a^2 \quad (9.3.9)$$

□

注 第一类完全椭圆积分 K 的定义为

$$K(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k \sin^2 \theta}} \quad (9.3.10)$$

例 9.3.2

证明 Pappus-Guldinus 定理:

- (1) 设平面曲线 γ 上质量均匀分布, 则 γ 绕 x 轴旋转所得到曲面 Σ 的面积等于 γ 的质心绕 x 轴旋转得到的周长乘以曲线 γ 的长度;
- (2) 设平面封闭曲线 γ 所围成的平面区域 D 上质量均匀分布, 则 D 绕 x 轴旋转得到的空间区域 Ω 的体积等于 D 的质心绕 x 轴旋转得到的周长乘以区域 D 的面积。

证明 (1)

$$2\pi \bar{y} = \frac{\int_{\gamma} 2\pi y dl}{\int_{\gamma} dl} = \frac{A_{\Sigma}}{L_{\gamma}} \quad (9.3.11)$$

(2)

$$2\pi\bar{y} = \frac{\oint_{\gamma} x d(\pi y^2)}{\oint_{\gamma} x dy} = \frac{V_{\Omega}}{A_D} \quad (9.3.12)$$

□

例 9.3.3

求:

- (1) 质量均匀分布的摆线的质心。
- (2) 摆线与 x 轴围成的平面区域上质量均匀分布, 该区域的质心。
- (3) 设 γ 为双纽线在右半平面的一支, 其上质量均匀分布, 该曲线的质心。
- (4) 设 D 为双纽线在右半平面的一支所围成的平面有界区域, 其上质量均匀分布, 该区域的质心。

解 记质心为 (\bar{x}, \bar{y}) 。(1) 由对称性可得 $\bar{x} = \pi a$, 且

$$\bar{y} = \frac{1}{2\pi} \frac{A_{\Sigma}}{L_{\gamma}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{64}{3}\pi a^2}{8a} = \frac{4}{3}a \quad (9.3.13)$$

(2) 由对称性可得 $\bar{x} = \pi a$, 且

$$\bar{y} = \frac{1}{2\pi} \frac{V_{\Omega}}{A_D} = \frac{1}{2\pi} \frac{5\pi^2 a^3}{3\pi a^2} = \frac{5}{6}a \quad (9.3.14)$$

(3) 由对称性可得 $\bar{y} = 0$, 且

$$\bar{x} = \frac{1}{2\pi} \frac{A_{\Sigma}}{L_{\gamma}} = \frac{1}{2\pi} \frac{2\sqrt{2}\pi a^2}{\sqrt{2}aK\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{a}{K\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (9.3.15)$$

(4) 由对称性可得 $\bar{y} = 0$, 且

$$\bar{x} = \frac{1}{2\pi} \frac{V_{\Omega}}{A_D} = \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2 a^3}{a^2} = \frac{\sqrt{2}}{16}\pi a \quad (9.3.16)$$

□

例 9.3.4若 \mathcal{C}^2 的平面正则曲线 γ 的曲率为非零常数 κ , 证明: γ 为圆弧。

证明 取曲线的弧长参数, 此时 $\|\mathbf{x}'(l)\| = 1$, $\|\mathbf{x}''(l)\| = \kappa = \text{const}$ 。由于 \mathbb{R}^2 和 \mathbb{C} 构成微分同胚 (自然地定义 $f: (x, y)^T \mapsto x + iy$), 不妨设

$$\mathbf{x}'(l) = e^{i\theta(l)}, \quad \theta(l) \in \mathbb{R} \quad (9.3.17)$$

则

$$\mathbf{x}''(l) = i\theta'(l)e^{i\theta(l)} \implies \|\mathbf{x}''(l)\| = |\theta'(l)| = \kappa \quad (9.3.18)$$

于是 $\theta'(l) = \kappa$ 或 $\theta'(l) = -\kappa$ 。由于导函数满足介值性质, 上述两种情形必有一种情形恒成立, 不妨设 $\theta'(l) = \kappa$, 则有

$$\theta(l) = \theta(0) + \kappa l \quad (9.3.19)$$

从而

$$\mathbf{x}(l) = \mathbf{x}(0) + \int_0^l e^{i\theta(s)} ds = \mathbf{x}(0) + \int_0^l e^{i\theta(0)+i\kappa s} ds = \mathbf{x}(0) + \frac{e^{i\theta(0)}}{i\kappa} (e^{i\kappa l} - 1) \quad (9.3.20)$$

因此

$$\left\| \mathbf{x}(l) - \mathbf{x}(0) + \frac{e^{i\theta(0)}}{i\kappa} \right\| = \frac{1}{\kappa} = \text{const} \quad (9.3.21)$$

□

注 同胚 (Homeomorphism) 的定义为: 设 X, Y 为拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 为双射, 若 f 和 f^{-1} 均连续, 则称 f 为同胚映射, X 和 Y 同胚。

微分同胚 (Diffeomorphism) 的定义为: 设 X, Y 为微分流形, $f: X \rightarrow Y$ 为双射, 若 f 和 f^{-1} 均光滑, 则称 f 为微分同胚映射, X 和 Y 微分同胚。

9.4 讲义习题

9.4.1 定积分几何应用与物理应用

例 9.4.1 (习题 7.5.4)

设 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是光滑的平面封闭曲线, 记

$$\kappa(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{pmatrix}}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} \quad (9.4.1)$$

计算:

$$\int_a^b \kappa(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad (9.4.2)$$

解 记 γ 的弧长参数为 l , 则

$$\|\mathbf{x}'(l)\| = 1, \quad \|\mathbf{x}''(l)\| = \kappa(l), \quad dl = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad (9.4.3)$$

不妨设 $\mathbf{x}'(l) = (\cos \theta(l), \sin \theta(l))$, 则 $\mathbf{x}''(l) = (-\sin \theta(l), \cos \theta(l))\theta'(l)$, 故

$$\kappa(l) = \frac{\det \begin{pmatrix} \cos \theta(l) & -\sin \theta(l)\theta'(l) \\ \sin \theta(l) & \cos \theta(l)\theta'(l) \end{pmatrix}}{1} = \theta'(l) \quad (9.4.4)$$

于是

$$\int_a^b \kappa(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{L_\gamma} \theta'(l) dl = \theta(L_\gamma) - \theta(0) = 2N\pi \quad (9.4.5)$$

其中 N 为曲线 γ 绕自身切线旋转的圈数¹ (Turning Number)。□

例 9.4.2 (习题 7.5.8)

设 $a > 0$, 求星形线 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ 的 (1) 弧长、(2) 所围有界区域的面积、(3) 绕 x 轴所得旋转体的体积和 (4) 旋转面的侧面积。

解 设星形线的参数方程为 $(x, y) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$ 。

(1)

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt \\ &= 3a |\cos t \sin t| dt = \frac{3a}{2} |\sin 2t| dt \end{aligned} \quad (9.4.6)$$

从而

$$L = \int_\gamma dl = \int_0^{2\pi} \frac{3a}{2} |\sin 2t| dt = 6a \quad (9.4.7)$$

(2)

$$S = - \int_\gamma y dx = - \int_0^{2\pi} a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt = \frac{3}{8} \pi a^2 \quad (9.4.8)$$

(3) 记 γ_+ 表示 γ 在 x 轴上方的部分, 方向与 γ 的自然正向相同, 则

$$V = - \int_{\gamma_+} \pi y^2 dx = \int_0^\pi \pi a^2 \sin^6 t \cdot 3a \cos^2 t \sin t dt = \frac{32\pi}{105} a^3 \quad (9.4.9)$$

(4)

$$A = \int_{\gamma_+} 2\pi y dl = \int_0^\pi 2\pi a \sin^3 t \cdot \frac{3a}{2} |\sin 2t| dt = \frac{12\pi}{5} a^2 \quad (9.4.10)$$

□

¹参考: https://en.wikipedia.org/wiki/Winding_number。不要与曲线绕定点旋转的圈数 (Winding Number) 混淆。

例 9.4.3 (习题 7.5.9)

设摆线方程为

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (9.4.11)$$

求:

- (1) 摆线的弧长;
- (2) 摆线与 x 轴所围成的有界区域的面积;
- (3) 摆线绕 x 轴旋转一周所围成的空间有界区域的体积;
- (4) 摆线绕 x 轴旋转一周所形成的旋转面的面积;
- (5) 摆线与 x 轴所围成的平面有界区域绕它的对称轴一周所形成的空间有界区域的体积;
- (6) 摆线绕它的对称轴旋转一周所形成的旋转面的面积。

解 (1)

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt \\ L &= \int dl = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 8a \end{aligned} \quad (9.4.12)$$

(2)

$$S = - \int_{\gamma} y dx = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t) dt = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2 \quad (9.4.13)$$

(3)

$$V = - \int_{\gamma} \pi y^2 dx = \int_0^{2\pi} \pi y(t)^2 x'(t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2 a^3 \quad (9.4.14)$$

(4)

$$A = \int_{\gamma} 2\pi y dl = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt = \frac{64}{3} \pi a^2 \quad (9.4.15)$$

(5) 注意到对称轴为 $x = \pi a$, 则

$$V_y = \int_{\gamma} \pi(x - \pi a)^2 dy = \pi a^3 \int_0^{\pi} (t - \sin t - \pi)^2 \sin t dt = \frac{9\pi^2 - 16}{6} \pi a^3 \quad (9.4.16)$$

(6)

$$A_y = \int_{\gamma} 2\pi(\pi - x) dl = 2\pi a^2 \int_0^{\pi} (\pi - t + \sin t) \sin \frac{t}{2} dt = \frac{4(3\pi - 4)}{3} \pi a^2 \quad (9.4.17)$$

□

例 9.4.4 (习题 7.5.11)

设 $a > 0$, 已知心脏线的极坐标方程为 $\rho = a(1 + \cos \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ 。求:

- (1) 心脏线的弧长;
- (2) 心脏线在弧长参数下的方程, 以及其各点处的曲率;
- (3) 心脏线的质心 (假设线密度为 1);
- (4) 心脏线所围成的平面有界区域的面积, 该区域的质心 (假设面密度为 1);
- (5) 心脏线绕其对称轴旋转所成的曲面的面积, 曲面的质心 (假设面密度为 1);
- (6) 心脏线绕其对称轴旋转所围成的三维区域的体积, 该区域的质心 (假设体密度为 1)。

解 (1)

$$dl = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta d\theta^2 + a^2(1 + \cos \theta)^2 d\theta^2} = 2a \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta \quad (9.4.18)$$

为了保持对称性, 我们选择积分区域为 $[-\pi, \pi]$, 从而

$$L = \int_{\gamma} dl = \int_{-\pi}^{\pi} 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a \quad (9.4.19)$$

(2) 同样为了保持对称性, 我们选择弧长参数 $l: [-\pi, \pi] \rightarrow [-4a, 4a]$ 为

$$l(\theta) = \int_0^{\theta} 2a \cos \frac{t}{2} dt = 4a \sin \frac{\theta}{2} \implies \theta(l) = 2 \arcsin \frac{l}{4a} \quad (9.4.20)$$

从而

$$\begin{aligned} \cos \theta(l) &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta(l)}{2} = 1 - \frac{l^2}{8a^2} \\ \sin \theta(l) &= 2 \sin \frac{\theta(l)}{2} \cos \frac{\theta(l)}{2} = \frac{l}{2a} \sqrt{1 - \frac{l^2}{16a^2}} \end{aligned} \quad (9.4.21)$$

故心脏线的参数方程为

$$\begin{aligned} x(l) &= a(1 + \cos \theta(l)) \cos \theta(l) = a \left(2 - \frac{l^2}{8a^2} \right) \left(1 - \frac{l^2}{8a^2} \right) \\ y(l) &= a(1 + \cos \theta(l)) \sin \theta(l) = \frac{l}{2} \left(2 - \frac{l^2}{8a^2} \right) \sqrt{1 - \frac{l^2}{16a^2}} \end{aligned} \quad (9.4.22)$$

求导可得

$$\kappa(l) = \|\mathbf{x}''(l)\| = \frac{3}{\sqrt{16a^2 - l^2}} \quad (9.4.23)$$

(3) 由对称性知质心在 x 轴上, 故 $\bar{y} = 0$, 而

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \int_{-\pi}^{\pi} x(l) dl = \frac{1}{8a} \int_{-\pi}^{\pi} a(1 + \cos \theta) \cos \theta \cdot 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{4}{5}a \quad (9.4.24)$$

即质心为 $(\frac{4}{5}a, 0)$ 。

(4)

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} a^2(1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3}{2} \pi a^2 \quad (9.4.25)$$

由对称性知质心在 x 轴上, 故 $\bar{y} = 0$, 而

$$\bar{x} = -\frac{1}{S} \int_{\gamma} xy dx = -\frac{2}{3\pi a^2} \int_{-\pi}^{\pi} a^2(1 + \cos \theta)^2 \cos \theta \sin \theta \cdot a(-\sin \theta)(1 + 2 \cos \theta) d\theta = \frac{5}{6} a \quad (9.4.26)$$

即质心为 $(\frac{5}{6}a, 0)$ 。

(5) 记 γ_+ 表示 γ 在 x 轴上方的部分, 方向与 γ 的自然正向相同, 则

$$A = \int_{\gamma^+} 2\pi y dl = \int_0^{\pi} 2\pi a(1 + \cos \theta) \sin \theta \cdot 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{32}{5} \pi a^2 \quad (9.4.27)$$

由对称性知质心在 x 轴上, 故 $\bar{y} = 0$, 而

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_{\gamma^+} 2\pi xy dl = \frac{5}{32\pi a^2} \int_0^{\pi} 2\pi a^2(1 + \cos \theta)^2 \sin \theta \cos \theta \cdot 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{50}{63} a \quad (9.4.28)$$

即质心为 $(\frac{50}{63}a, 0)$ 。

(6)

$$V = - \int_{\gamma^+} \pi y^2 dx = \int_0^{\pi} \pi a^2(1 + \cos \theta)^2 \sin^2 \theta \cdot a \sin \theta(1 + 2 \cos \theta) d\theta = \frac{3}{8} \pi a^3 \quad (9.4.29)$$

由对称性知质心在 x 轴上, 故 $\bar{y} = 0$, 而

$$\bar{x} = -\frac{1}{V} \int_{\gamma^+} \pi xy^2 dx = \frac{8}{3\pi a^3} \int_0^{\pi} \pi a^3(1 + \cos \theta)^3 \sin^2 \theta \cos \theta \cdot a \sin \theta(1 + 2 \cos \theta) d\theta = \frac{4}{5} a \quad (9.4.30)$$

即质心为 $(\frac{4}{5}a, 0)$ 。

□

第 10 次习题课 广义积分

2023 年 12 月 18 日, 2024 年 12 月 5 日, 2025 年 12 月 17 日。本节对应微积分 A(1) 第 11 次习题课的内容。

10.1 知识点复习

Riemann 定积分的研究对象是有界闭区间上的有界函数, 当这两个“有界”中任意一个不满足时, 可以利用 Riemann 定积分的极限来研究函数的广义积分, 包括无穷限积分和瑕积分。本节讨论的函数都假设是内闭 Riemann 可积的, 即在任何有界闭区间或不包含瑕点的有界闭区间内均 Riemann 可积。

10.1.1 广义积分的概念

重要概念回顾

(1) **无穷限积分**: 设函数 $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足:

- 内闭 Riemann 可积: $\forall A > a$, f 在区间 $[a, A]$ 上 Riemann 可积;
- 极限存在: $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$ 收敛。

则称

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx \quad (10.1.1)$$

为 f 在区间 $[a, +\infty)$ 上的广义积分, 称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛或 f 在区间 $[a, +\infty)$ 上广义可积。类似可定义广义积分 $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ 。 f 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上广义可积的充要条件是 $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 均收敛, 并且它们的和为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 。

(2) **瑕积分**: 设函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 满足:

- 无界: f 在区间 $[a, b]$ 上无界;
- 内闭 Riemann 可积: $\forall c \in (a, b)$, f 在区间 $[a, c]$ 上 Riemann 可积;
- 极限存在: $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$ 收敛。

则称

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx \quad (10.1.2)$$

为 f 在区间 $[a, b]$ 上的广义积分, 称广义积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛或 f 在区间 $[a, b]$ 上广义可积, b 为 f 的瑕点。

(3) **含有多个瑕点的瑕积分:** 设函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 满足:

- f 在区间 I 上只有有限多个瑕点;
- 把区间 I 分解成有限多个不相交的区间 I_k 的并, 每个 I_k 为有界区间或单侧有界区间, f 在每个有界区间 I_k 中至多只有一个瑕点, 且该瑕点为区间 I_k 的端点。
- 每个广义积分 $\int_{I_k} f(x) dx$ 都收敛。

则称

$$\int_a^b f(x) dx := \sum_k \int_{I_k} f(x) dx \quad (10.1.3)$$

为 f 在区间 I 上的广义积分, 称广义积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛或 f 在区间 I 上广义可积。

(4) **发散:** 若广义积分 $\int_a^b f(x) dx$ 不收敛, 则称广义积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散。



图 10.1.1: 收敛还是发散?

应用

- (1) $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$ 的收敛性。
- (2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 、 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}$ 、 $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^p}$ 的收敛性。
- (3) $\int_0^1 \frac{1}{x^p}$ 的收敛性。

10.1.2 广义积分的收敛性

若未特殊说明, 下文中各被积函数在其定义域内均满足内闭 Riemann 可积, 且将 $[a, +\infty)$ 上的无穷限积分和 $[a, b]$ 上的瑕积分 (b 为唯一瑕点的) 合记为广义积分 $\int_a^b f(x) dx$, 其中 $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 。

重要概念回顾

- (1) **绝对收敛:** 若广义积分 $\int_a^b |f(x)| dx$ 收敛, 则称广义积分 $\int_a^b f(x) dx$ 绝对收敛。
- (2) **条件收敛:** 若广义积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛但 $\int_a^b |f(x)| dx$ 发散, 则称广义积分 $\int_a^b f(x) dx$ 条件收敛。

重要定理回顾

(1) **Cauchy 收敛准则**: 无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛当且仅当: $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > a$ 使得

$$A_2 > A_1 > N_\varepsilon \implies \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad (10.1.4)$$

瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ (b 为唯一瑕点) 收敛当且仅当: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, b-a)$ 使得

$$0 < \delta_2 < \delta_1 < b-a \implies \left| \int_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad (10.1.5)$$

(2) 若广义积分 $\int_a^b f(x) dx$ 绝对收敛, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛。

(3) **比较判别法** (普通形式): 设 f, g 非负, 且 $\exists M > 0$ 使得 $\forall x \in I$ 都有 $f(x) \leq Mg(x)$, 则

- $\int_a^b g(x) dx$ 收敛 $\implies \int_a^b f(x) dx$ 收敛;
- $\int_a^b f(x) dx$ 发散 $\implies \int_a^b g(x) dx$ 发散。

(4) **比较判别法** (极限形式): 设 f, g 非负, 且满足 $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = C$, 则

- 若 $C \in (0, +\infty)$, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 与 $\int_a^b g(x) dx$ 同敛散;
- 若 $C = 0$, 则 $\int_a^b g(x) dx$ 收敛 $\implies \int_a^b f(x) dx$ 收敛;
- 若 $C = +\infty$, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛 $\implies \int_a^b g(x) dx$ 收敛。

(5) **乘积函数判别法**: 设 g 在 $[a, b]$ 上单调, $F(x) := \int_a^x f(x) dx$, 则当下述两组条件之一成立时, $\int_a^b f(x)g(x) dx$ 收敛:

- Dirichlet: $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且 $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$;
- Abel: $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ 收敛, 且 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界。

应用

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$ 不收敛。

(2) Gamma 函数、Beta 函数。

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}$ 的收敛性。

注

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛当且仅当 $\exists I \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0$ 使得

$$A < -N_\varepsilon < N_\varepsilon < B \implies \left| \int_A^B f(x) dx - I \right| < \varepsilon \quad (10.1.6)$$

要确保 A, B 各自的任意性。

(2) 比较判别法只能用于判断广义积分的绝对收敛性, 不能用于判断广义积分的条件收敛性。

(3) 比较判别法的常用“标准尺”:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \text{收敛} & p < 1 \\ \text{发散} & p \geq 1 \end{cases}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \text{收敛} & p > 1 \\ \text{发散} & p \leq 1 \end{cases} \quad (10.1.7)$$

10.1.3 广义积分的计算

重要定理回顾

(1) **广义 Newton-Leibniz 公式:** 设 $F'(x) = f(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ 存在, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a) \quad (10.1.8)$$

(2) **换元法:** 设 $f \in \mathcal{C}[a, b]$, $x = \varphi(t) \in \mathcal{C}^1(\alpha, \beta)$, 且 $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} \varphi(t) = a, \lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = b$, 其中 $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt \quad (10.1.9)$$

上式中有一个广义积分收敛, 则另一个积分也收敛, 且等式成立。

(3) **分部积分:** 设 $u, v \in \mathcal{C}^1[a, b]$, 其中 $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 。若 $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x)v(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x)$ 均存在, 则

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx \quad (10.1.10)$$

上式中有一个广义积分收敛, 则另一个积分也收敛, 且等式成立。

10.2 雨课堂作业

例 10.2.1 (作业第 1 题)

(1) (Wirtinger 不等式) 设 $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$ 满足 $f(a) = f(b)$ 、 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 证明:

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{4\pi^2} \int_a^b f'(x)^2 dx \quad (10.2.1)$$

其中等号成立当且仅当 $f(x) = A \sin\left(\frac{2\pi(x-a)}{b-a} - \theta\right)$ 。

(2) 利用 Wirtinger 不等式证明等周不等式: 设 Ω 为平面上一个有界区域, 其边界是一条长度为 L 的 \mathcal{C}^1 的简单封闭曲线。证明: Ω 的面积 S 满足 $S \leq \frac{L^2}{4\pi}$, 其中等号成立当且仅当 Ω 是圆盘。

证明 (1) 不妨设 $[a, b] = [0, 2\pi]$, 考虑函数 $\psi(x) := f(x + \pi) - f(x)$, 由已知条件可得

$$\psi(0)\psi(\pi) = [f(\pi) - f(0)][f(2\pi) - f(\pi)] = -[f(\pi) - f(0)]^2 \leq 0 \quad (10.2.2)$$

由介值定理可得 $\exists \theta \in [0, \pi]$ 使得 $\psi(\theta) = 0$, 即 $f(x) = f(x + \theta)$ 。定义

$$\phi(x) := \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(\theta)}{\sin(y - \theta)} = \begin{cases} \frac{f(x) - f(\theta)}{\sin(x - \theta)}, & x \neq \theta, \theta + \pi \\ f'(\theta), & x = \theta \\ -f'(\theta + \pi), & x = \theta + \pi \end{cases} \implies f(x) - f(\theta) = \phi(x) \sin(x - \theta) \quad (10.2.3)$$

直接计算表明

$$f'(x)^2 - [f(x) - f(\theta)]^2 = [\phi'(x) \sin(x - \theta)]^2 + [\phi^2(x) \sin(x - \theta) \cos(x - \theta)]' \quad (10.2.4)$$

等式右侧的第二项在 $[0, 2\pi]$ 上积分为零, 因此对上式积分可得

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f'(x)^2 dx &= \int_0^{2\pi} [f(x) - f(\theta)]^2 dx + \int_0^{2\pi} [\phi'(x) \sin(x - \theta)]^2 dx \geq \int_0^{2\pi} [f(x) - f(\theta)]^2 dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx - 2f(\theta) \underbrace{\int_0^{2\pi} f(x) dx}_0 + 2\pi f(\theta)^2 \geq \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \end{aligned} \quad (10.2.5)$$

即 Wirtinger 不等式成立, 等号成立当且仅当 $\phi'(x) = f(\theta) = 0$, 即 $\phi(x) = A$, 从而 $f(x) = A \sin(x - \theta)$ 。

(2) 设 $\gamma : (x(l), y(l))$ ($0 \leq l \leq L$) 为区域 Ω 的边界曲线的参数方程, 满足 $x(0) = x(2\pi)$ 、 $y(0) = y(2\pi)$, 其中 l 为弧长参数, 且 l 增大的方向为曲线的自然正向。平移 (x, y) 使得 $\int_0^L x(l) dl = 0$ 、 $\int_0^L y(l) dl = 0$, 则由 Wirtinger 不等式可得

$$\int_0^L x(l)^2 dl \leq \frac{L^2}{4\pi^2} \int_0^L x'(l)^2 dl, \quad \int_0^L y(l)^2 dl \leq \frac{L^2}{4\pi^2} \int_0^L y'(l)^2 dl \quad (10.2.6)$$

面积 S 可表示为

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_0^L [x(l)y'(l) - y(l)x'(l)] dl \quad (10.2.7)$$

由积分三角不等式和向量 Cauchy 不等式可得

$$S \stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{2} \int_0^L |x(l)y'(l) - y(l)x'(l)| dl \stackrel{(2)}{\leq} \frac{1}{2} \int_0^L \sqrt{x(l)^2 + y(l)^2} \sqrt{x'(l)^2 + y'(l)^2} dl = \frac{1}{2} \int_0^L \sqrt{x(l)^2 + y(l)^2} dl \quad (10.2.8)$$

再由积分 Cauchy 不等式可得

$$S^2 \stackrel{(3)}{\leq} \frac{1}{4} \int_0^L [x(l)^2 + y(l)^2] dl \cdot \int_0^L 1^2 dl = \frac{L}{4} \int_0^L [x(l)^2 + y(l)^2] dl \quad (10.2.9)$$

由 Wirtinger 不等式可得

$$S^2 \stackrel{(4)}{\leq} \frac{L}{4} \cdot \frac{L^2}{4\pi^2} \int_0^L [x'(l)^2 + y'(l)^2] dl = \frac{L^4}{16\pi^2} \implies S \leq \frac{L^2}{4\pi} \quad (10.2.10)$$

等号成立时当且仅当

$$\begin{cases} (1) & x(l)y'(l) - y(l)x'(l) \geq 0 \\ (2) & x(l)x'(l) + y(l)y'(l) = 0 \\ (3) & \sqrt{x(l)^2 + y(l)^2} = R \\ (4) & x(l) = A_1 \cos \frac{2\pi l}{L} + B_1 \sin \frac{2\pi l}{L} \\ (4) & y(l) = A_2 \cos \frac{2\pi l}{L} + B_2 \sin \frac{2\pi l}{L} \end{cases} \implies \begin{cases} A_1 B_2 - A_2 B_1 \geq 0 \\ A_1 B_1 + A_2 B_2 = 0 \\ A_1^2 + A_2^2 = B_1^2 + B_2^2 = R^2 \end{cases} \quad (10.2.11)$$

设 $(A_1, A_2) = R(\cos \theta, \sin \theta)$ 、 $(B_1, B_2) = R(-\sin \phi, \cos \phi)$ ，则由上式可得 $\sin(\theta - \phi) = 0$ ，从而可取 $\theta = \phi$ ，即

$$x(l) = R \cos \left(\frac{2\pi l}{L} + \theta \right), \quad y(l) = R \sin \left(\frac{2\pi l}{L} + \theta \right), \quad l \in [0, L] \quad (10.2.12)$$

即 Ω 为圆盘。 □

另证 本题第 (1) 问还可以采用 Fourier 级数的方法证明。设 f 在 $[0, 2\pi]$ 上展开为 Fourier 级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (10.2.13)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.2.14)$$

且 $a_0 = 0$ 。逐项求导可得

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} n(-a_n \sin nx + b_n \cos nx) \quad (10.2.15)$$

分别对 f 和 f' 应用 Parseval 等式可得

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \pi \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \leq \int_0^{2\pi} f'(x)^2 dx \quad (10.2.16)$$

即 Wirtinger 不等式成立，等号成立当且仅当 $\forall n \geq 2, a_n = b_n = 0$ ，即 $f(x) = A \cos x + B \sin x$ 。 □

例 10.2.2 (作业第 2 题)

已知旋轮线的参数方程为 $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)。

- (1) 设旋轮线的质量均匀分布, 求该曲线的质心。
- (2) 设旋轮线与 x 轴所围有界区域的质量均匀分布, 求该平面区域的质心。
- (3) 旋轮线绕 x 轴旋转一周, 求所围成的三维有界区域的体积。
- (4) 旋轮线绕 x 轴旋转一周, 求所形成旋转面的面积。

解 旋轮线的弧长微元为

$$dl = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 2\sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} dt = 2 \sin \frac{t}{2} dt, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (10.2.17)$$

与 x 轴所围成的平面区域的面积微元为

$$dS = y(t)x'(t) dt = (1 - \cos t)(1 - \cos t) dt = (1 - \cos t)^2 dt, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (10.2.18)$$

曲线的弧长为

$$L = \int_0^{2\pi} dl = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = 8 \quad (10.2.19)$$

曲线与 x 轴所围成的平面区域的面积为

$$S = \int_0^{2\pi} dS = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi \quad (10.2.20)$$

(1) 由对称性可得 $\bar{x} = \pi$, 计算可得

$$\bar{y}_L = \frac{\int_0^{2\pi} y(t) dl}{L} = \frac{\int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \cdot 2 \sin \frac{t}{2} dt}{8} = \frac{4}{3} \quad (10.2.21)$$

(2) 由对称性可得 $\bar{x} = \pi$, 计算可得

$$\bar{y}_S = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{y(t)}{2} dS}{S} = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos t}{2} (1 - \cos t)^2 dt}{3\pi} = \frac{5}{6} \quad (10.2.22)$$

(3) 由 Pappus-Guldinus 定理可得体积为

$$V = 2\pi \bar{y}_S \cdot S = 2\pi \cdot \frac{5}{6} \cdot 3\pi = 5\pi^2 \quad (10.2.23)$$

(4) 由 Pappus-Guldinus 定理可得面积为

$$A = 2\pi \bar{y}_L \cdot L = 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot 8 = \frac{64\pi}{3} \quad (10.2.24)$$

□

例 10.2.3 (作业第 3 题)

求半径为 R 且质量均匀分布的球壳对球内与球心距离为 r 的质点的引力。

解 设球壳的面密度为 σ , 质点的质量为 m 。不妨将质点放置于 $(r, 0)$, 由对称性可得引力的方向沿 x 轴。对于球壳上一点 (x, y, z) 附近的面积微元 dS , 其贡献的沿 x 轴方向的引力可表示为

$$dF_x = \frac{Gm \cdot \sigma dS}{[(x-r)^2 + y^2 + z^2]} \cdot \frac{x-r}{\sqrt{(x-r)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{Gm\sigma(x-r)dS}{[(x-r)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (10.2.25)$$

对于 $[x, x+dx]$ 范围内的球壳 $\Sigma_x(dx)$, 其上所有点与质点的距离均可视作相同, 故可应用上式计算。 $\Sigma_x(dx)$ 与质点的距离可表示为

$$r = \sqrt{(x-r)^2 + (R^2 - x^2)} = \sqrt{R^2 - 2rx + r^2} \quad (10.2.26)$$

$\Sigma_x(dx)$ 的面积微元可视为由 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ 在 $[x, x+dx]$ 的部分绕 x 轴旋转的部分, 其可表示为

$$dS = 2\pi y dl = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi R dx \quad (10.2.27)$$

故 $\Sigma_x(dx)$ 贡献的沿 x 轴方向的引力为

$$dF_x = \frac{Gm\sigma(x-r) \cdot 2\pi R dx}{(R^2 - 2rx + r^2)^{3/2}} \quad (10.2.28)$$

积分可得

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{-R}^R dF_x = 2\pi RGm\sigma \int_{-R}^R \frac{(x-r) dx}{(R^2 - 2rx + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2\pi RGm\sigma}{r^2} \int_{R+r}^{R-r} \frac{\left(\frac{R^2+r^2-t^2}{2r} - r\right) \frac{-t}{r} dt}{t^3} \\ &= \frac{\pi RGm\sigma}{r^2} \int_{R-r}^{R+r} \left(\frac{R^2 - r^2}{t^2} - 1\right) dt = \frac{\pi RGm\sigma}{r^2} \left[-\frac{R^2 - r^2}{t} \Big|_{R-r}^{R+r} - 2r \right] = 0 \end{aligned} \quad (10.2.29)$$

即球壳对球内质点不产生引力。 □

例 10.2.4 (作业第 4 题)

设 $\gamma: (x(t), y(t))$ ($a \leq t \leq b$) 是一条 \mathcal{C}^1 的简单封闭曲线, 它围成一个有界的平面区域 Ω 。设 $h > 0$, 令

$$V = \{(tx, ty, th) \mid (x, y) \in \Omega, 0 \leq t \leq 1\} \quad (10.2.30)$$

(1) 证明: 锥 V 的体积等于同底等高的柱体体积的三分之一。

(2) 如果这个锥的质量是均匀分布的, 求这个锥的质心位置。

解 (1) 设区域 Ω 的面积为 S , 则柱体的体积为 Sh 。记

$$S(t) := \{(tx, ty) \mid (x, y) \in \Omega\} \implies |S(t)| = \oint_{\partial\Omega} (tx \, d(ty) - ty \, d(tx)) = t^2 \oint_{\partial\Omega} (x \, dy - y \, dx) = t^2 S \quad (10.2.31)$$

则 $z \in h[t, t + dt]$ 范围内的锥的体积微元可表示为 $dV(t) = |S(t)| \cdot h \, dt$, 故锥 V 的体积可表示为

$$|V| = \int_0^1 |S(t)| \cdot h \, dt = \int_0^1 t^2 S \cdot h \, dt = \frac{1}{3} Sh \quad (10.2.32)$$

(2) 设 Ω 的质心位置为 $(\bar{x}(1), \bar{y}(1))$, 计算可得 $S(t)$ 的质心位置为

$$\bar{x}(t) = \frac{\int_{\Omega} tx \cdot ty \, d(tx)}{\int_{\Omega} ty \, d(tx)} = t \frac{\int_{\Omega} x \cdot y \, dx}{\int_{\Omega} y \, dx} = t\bar{x}_0, \quad \bar{y}(t) = t\bar{y}_0 \quad (10.2.33)$$

故锥的质心位置为

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int_0^1 \bar{x}(t) |S(t)| \cdot h \, dt}{|V|} = \frac{\int_0^1 t\bar{x}_0 \cdot t^2 S \cdot h \, dt}{\frac{1}{3} Sh} = \frac{3}{4} \bar{x}_0 \\ \bar{y} &= \frac{\int_0^1 \bar{y}(t) |S(t)| \cdot h \, dt}{|V|} = \frac{\int_0^1 t\bar{y}_0 \cdot t^2 S \cdot h \, dt}{\frac{1}{3} Sh} = \frac{3}{4} \bar{y}_0 \\ \bar{z} &= \frac{\int_0^1 th \cdot |S(t)| \cdot h \, dt}{|V|} = \frac{\int_0^1 th \cdot t^2 S \cdot h \, dt}{\frac{1}{3} Sh} = \frac{3}{4} h \end{aligned} \quad (10.2.34)$$

故锥的质心位置为 $(\frac{3}{4}\bar{x}_0, \frac{3}{4}\bar{y}_0, \frac{3}{4}h)$ 。 □

例 10.2.5 (作业第 5 题, 习题 7.6.2)

设 γ 为曲线 $x^3 + y^3 = 3xy$, 求:

- (1) γ 在第一象限所围成的有界区域的面积;
- (2) γ 与它的渐近线所围成的平面区域的面积。

解 曲线的参数方程可表为

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad (10.2.35)$$

(1) $x, y \geq 0$ 当且仅当 $t \geq 0$, 因此

$$A_1 = - \int_{\gamma} y \, dx = - \int_0^{+\infty} \frac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} \, dt = \frac{3}{2} \quad (10.2.36)$$

(2) 曲线的渐近线为 $y = -x - 1$, 因此

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{-\infty}^{-1} [y(t) + x(t) + 1] x'(t) \, dt + \int_{-1}^0 [y(t) + x(t) + 1] x'(t) \, dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{3(1-2t^3)}{(1-t+t^2)^3} \, dt = \left. \frac{6t^2+3}{2(t^2-t+1)} \right|_{-\infty}^0 = \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (10.2.37)$$

□

例 10.2.6 (作业第 6 题, 习题 7.6.3)

计算以下广义积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} dx \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx \quad (3) \int_0^1 \ln x dx$$

解 (1)

$$\begin{aligned} \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} dx &= -\frac{\ln x}{4(1+x^2)^2} + \int \frac{dx}{4x(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{\ln x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{8(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln x - \frac{1}{8} \ln(1+x^2) \end{aligned} \quad (10.2.38)$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{8(1+x^2)} + \frac{1}{8} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \right] &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2(2+x^2) \ln x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{8(1+x^2)} - \frac{1}{8} \ln(1+x^2) \right] &= \frac{1}{8} \end{aligned} \quad (10.2.39)$$

故有

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = 0 - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} \quad (10.2.40)$$

(2)

$$\int \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx \stackrel{x=\tan t}{=} \int t \cos t dt = t \sin t + \cos t = \frac{x \arctan x + 1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (10.2.41)$$

从而

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \arctan x + 1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \quad (10.2.42)$$

(3)

$$\int_0^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_0^1 = -1 \quad (10.2.43)$$

□

例 10.2.7 (作业第 7 题)

讨论以下积分的收敛性:

$$\begin{aligned} (1) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx & \quad (4) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^x-1}} & (7) \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx, \text{ 如果收敛, 求} \\ (2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx & \quad (5) \int_0^1 \frac{dx}{\ln x} & \text{它的值。} \\ (3) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}} & \quad (6) \int_0^1 \frac{x^{\beta-1}-x^{\alpha-1}}{\ln x} dx \end{aligned}$$

解 (1) 记 $I_1 = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$ 、 $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$, 则

$$I_1 \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}} \quad (x \rightarrow 0^+), \quad I_2 \sim \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (x \rightarrow +\infty) \quad (10.2.44)$$

原积分收敛当且仅当 I_1, I_2 均收敛, 即 $\alpha - 1 < 1$ 且 $\alpha > 1$, 即 $\alpha \in (1, 2)$ 。

(2) 记 $I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$ 、 $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$, 则

$$I_1 \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}} \quad (x \rightarrow 0^+), \quad I_2 \sim \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha-\varepsilon}} \quad (x \rightarrow +\infty) \quad (10.2.45)$$

原积分收敛当且仅当 I_1, I_2 均收敛, 即 $\alpha - 1 < 1$ 且 $\alpha - \varepsilon > 1$, 即 $\alpha \in (1, 2)$ 。

(3) 记 $I_1 = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$ 、 $I_2 = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$, 则

$$I_1 \sim \int_2^3 \frac{\sqrt{2} dx}{\sqrt{x-2}} \quad (x \rightarrow 2^+), \quad I_2 \sim \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} \quad (x \rightarrow +\infty) \quad (10.2.46)$$

由于 $\frac{1}{2} < 1$ 且 $\frac{3}{2} > 1$, 故原积分收敛。

(4) 记 $I_1 = \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{e^x-1}}$ 、 $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^x-1}}$, 则

$$I_1 \sim \int_0^1 \sqrt{x} dx \quad (x \rightarrow 0^+), \quad I_2 \sim \int_1^{+\infty} x e^{-x/2} dx \quad (x \rightarrow +\infty) \quad (10.2.47)$$

由于 $-\frac{1}{2} < 1$, 故原积分收敛。

(5) 记 $x = e^{-t}$, 则

$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln x} = \int_{+\infty}^0 \frac{-e^{-t} dt}{-t} = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = - \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt =: -I_1 - I_2 \quad (10.2.48)$$

其中

$$I_1 \sim \int_0^1 \frac{dt}{t} \quad (t \rightarrow 0^+) \quad (10.2.49)$$

故原积分发散。

(6) 记 $x = e^{-t}$, 则

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1} - x^{\alpha-1}}{\ln x} dx = \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-(\beta-1)t} - e^{-(\alpha-1)t}}{-t} (-e^{-t} dt) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt \quad (10.2.50)$$

记 $I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt$ 、 $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt$, 则

$$I_1 \sim \int_0^1 (\beta - \alpha) dt \quad (t \rightarrow 0^+), \quad I_2 \sim \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt \quad (t \rightarrow +\infty) \quad (10.2.51)$$

故原积分收敛当且仅当 I_2 收敛, 即 $\alpha > 0$ 且 $\beta > 0$ 。

(7) 原积分可表示为

$$I \sim \int_0^{\pi/2} \ln x dx \quad (x \rightarrow 0^+) \quad (10.2.52)$$

故原积分收敛。为了计算这个广义积分，利用

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x \cos x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln \frac{\sin 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x \, dx - \frac{\pi}{4} \ln 2 \stackrel{t=2x}{=} \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \ln \sin t \, dt - \frac{\pi}{4} \ln 2 = \frac{1}{2} I - \frac{\pi}{4} \ln 2 \end{aligned} \quad (10.2.53)$$

故 $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ 。 □

10.3 补充习题

10.3.1 广义积分的概念

例 10.3.1

设函数 f 在 $(0, 1]$ 上单调，在 $x=0$ 的邻域内无界，证明：若 $\int_0^1 f(x) \, dx$ 收敛，则

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (10.3.1)$$

讨论：

- 对于一般的 f ，瑕积分 $\int_a^b f(x) \, dx$ 能否看成相应 Riemann 和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 的极限？
- (等分、定标志点) Riemann 积分的定义是否可以改为：

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \quad (10.3.2)$$

- (任意划分、定标志点) Riemann 积分的定义是否可以改为：对任意划分 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (10.3.3)$$

- (等分、任意标志点) Riemann 积分的定义是否可以改为：

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i), \quad \forall \xi_i \in \left[a + \frac{b-a}{n}(i-1), a + \frac{b-a}{n} i \right] \quad (10.3.4)$$

- 如果没有单调性假设，本题结论是否成立？
- 对于无穷限积分 $\int_0^{+\infty} f(x) \, dx$ ，你能给出类似的计算方法并证明吗？

证明 不妨设 f 单调递增, 则有

$$\int_{(i-1)/n}^{i/n} f(x) dx \leq \int_{(i-1)/n}^{i/n} f\left(\frac{i}{n}\right) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \leq \int_{i/n}^{(i+1)/n} f\left(\frac{i}{n}\right) dx \leq \int_{i/n}^{(i+1)/n} f(x) dx \quad (10.3.5)$$

所以

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \leq \int_0^1 f(x) dx + \frac{f(1) - f\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \quad (10.3.6)$$

为了处理 $\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$, 注意到

$$2 \int_{1/2n}^{1/n} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_{1/n}^{2/n} f(x) dx \quad (10.3.7)$$

因为 $\int_0^1 f(x) dx$ 收敛, 由 Cauchy 收敛准则和夹挤定理知

$$0 = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/2n}^{1/n} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^{2/n} f(x) dx \quad (10.3.8)$$

最后由夹挤定理知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx \quad (10.3.9)$$

□

讨论

- 对于一般的 f , 瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ 不能看成相应 Riemann 和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 的极限。例如取 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 一方面 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$; 另一方面, 取 $[0, 1]$ 的 n 等分, 选标志点为 $\xi_1 = \frac{1}{9n^2}$, $\xi_i = \frac{i}{n} (i > 1)$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\xi_1) \Delta x_1 = 3 > 2 \quad (10.3.10)$$

- 不可以。设 $b \notin \mathbb{Q}$, 对于 Dirichlet 函数 $D(x)$, 在此定义下有

$$\int_0^1 D(x) dx = 1, \quad \int_0^b D(x) dx = 0 \quad (10.3.11)$$

此时 $\int_0^x D(x) dx$ 关于 x 处处间断。

- 不可以。例见 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 的计算。
- 不可以。例见 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 的计算。
- 事实上, 只要 f 在 $x=0$ 的一个邻域中 $(0, \delta)$ 具有单调性即可, 在区间 $[\delta, 1]$ 中要求 f 满足 Riemann 可积 (本题中单调性保证了这个 Riemann 可积性)。
- 一种思路是利用 $e^{-x} : [0, +\infty) \rightarrow (0, 1]$, 故有

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \stackrel{x=-\ln t}{=} \int_1^0 f(-\ln t) d(-\ln t) = \int_0^1 \frac{f(-\ln t)}{t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} f\left(-\ln \frac{i}{n}\right) \quad (10.3.12)$$

10.3.2 广义积分的计算

例 10.3.2

计算以下广义积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} x e^{-x} \sin x \, dx \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} \quad (3) \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

解 (1)

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x} [(1+x) \cos x + x \sin x] \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \quad (10.3.13)$$

(2)

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln 2 \quad (10.3.14)$$

(3)

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin \ln x \Big|_1^e = \frac{\pi}{2} \quad (10.3.15)$$

□

例 10.3.3

计算以下广义积分:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \ln \sin x \, dx \quad (10.3.16)$$

解 由分部积分可得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, d(1 - \cos x) = (1 - \cos x) \ln \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \cos x \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{t(1-t)}{1-t^2} \, dt = [\ln(1+t) - t]_0^1 = \ln 2 - 1 \end{aligned} \quad (10.3.17)$$

□

例 10.3.4

计算以下广义积分:

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx \quad (10.3.18)$$

解 由比较判别法可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}} = 0 \quad (10.3.19)$$

而 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 收敛, 故 $\int_0^1 \ln \sin x dx$ 收敛。注意到

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx \stackrel{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_0^{\pi/2} \ln \sin t dt \quad (10.3.20)$$

从而 $\int_0^1 \ln \cos x dx$ 收敛, 因此

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x \cos x) dx = \int_0^{\pi/2} (\ln \sin 2x - \ln 2) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\pi} \ln \sin x dx}_{2I} \quad (10.3.21)$$

即 $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ 。 □

例 10.3.5

设 $a > 0$, 计算以下广义积分:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} \quad (10.3.22)$$

解 由比较判别法可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \quad (10.3.23)$$

故 I 收敛。记

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} \quad (10.3.24)$$

注意到

$$I_1 \stackrel{x=y^{-1}}{=} \int_{+\infty}^1 \frac{-y^a dy}{(1+y^2)(1+y^a)} = \int_1^{+\infty} \frac{y^a dy}{(1+y^2)(1+y^a)} \quad (10.3.25)$$

故

$$I = I_1 + I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \quad (10.3.26)$$

□

例 10.3.6

计算以下广义积分:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \quad (10.3.27)$$

解 记

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \quad (10.3.28)$$

对于 I_1 , $x=0$ 为被积函数的可去间断点, 故 I_1 为定积分而非广义积分. 对于 I_2 , 注意到

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \stackrel{x=t^{-1}}{=} \int_1^0 \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2} dt = -I_1 \quad (10.3.29)$$

故 I_2 亦收敛, 且 $I = I_1 + I_2 = 0$. □

例 10.3.7

设 $a, b > 0$, 函数 $f \in \mathcal{C}[0, +\infty)$ 且极限 $f(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 证明 Froullani 广义积分:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = [f(+\infty) - f(0)] \ln \frac{b}{a} \quad (10.3.30)$$

证明 将原积分 I 拆成 I_1, I_2 两部分, 记

$$I_1 = \int_0^1 \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx \quad (10.3.31)$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx &= \int_{b\varepsilon}^b \frac{f(u)}{u} du - \int_{a\varepsilon}^a \frac{f(u)}{u} du = \int_a^b \frac{f(u)}{u} du - \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u} du \\ \int_1^{\lambda} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx &= \int_b^{b\lambda} \frac{f(u)}{u} du - \int_a^{a\lambda} \frac{f(u)}{u} du = \int_{a\lambda}^{b\lambda} \frac{f(u)}{u} du - \int_a^b \frac{f(u)}{u} du \end{aligned} \quad (10.3.32)$$

由积分中值定理可得

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ \lambda \rightarrow +\infty}} \int_{\varepsilon}^{\lambda} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{a\lambda}^{b\lambda} \frac{f(u)}{u} du - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u} du \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\xi_{\lambda}) \ln \frac{b}{a} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\xi_{\varepsilon}) \ln \frac{b}{a} = [f(+\infty) - f(0)] \ln \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (10.3.33)$$

□

注 利用这个结论可以得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx = \ln \frac{a}{b} \quad (10.3.34)$$

例 10.3.8

设 f 在 \mathbb{R} 上广义可积, 证明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (10.3.35)$$

证明 利用 $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ 可设 $x = e^t = \cosh t + \sinh t$, 则

$$\int_0^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(2 \sinh t)(\sinh t + \cosh t) dt \quad (10.3.36)$$

设 $x = -e^{-t} = \sinh t - \cosh t$, 则

$$\int_{-\infty}^0 f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(2 \sinh t)(\cosh t - \sinh t) dt \quad (10.3.37)$$

其中

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(2 \sinh t) \sinh t dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(2 \sinh t) \cosh t}_{=\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx} \cdot \underbrace{\tanh t}_{\text{单调有界}} dt \quad (10.3.38)$$

由 Abel 判别法知以上广义积分均收敛, 且有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(2 \sinh t) 2 \cosh t dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (10.3.39)$$

□

10.3.3 广义积分的收敛性

例 10.3.9

设 f 在 $[a, +\infty)$ 上内闭 Riemann 可积, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛。

(1) 设 f 在 $[a, +\infty)$ 上非负且一致连续, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;

(2) 设 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;

(3) 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 存在, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;

(4) 设 f 在 $[a, +\infty)$ 上单调, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;

(5) 设 f 在 $[a, +\infty)$ 上非负且连续, 是否仍有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

解 (1) 采用反证法。设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$, 由于 f 非负, 故 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $\forall N_n > a, \exists x_n > N$ 使得 $f(x) \geq 2\varepsilon$ 。由于 f 一致连续, 故 $\exists \delta > 0$ 使得

$$|\lambda - \mu| \leq \delta \implies |f(\lambda) - f(\mu)| \leq \varepsilon, \quad \forall \lambda, \mu \in [a, +\infty) \quad (10.3.40)$$

从而有

$$f(x) \geq f(x_n) - \varepsilon \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon, \quad \forall x \in [x_n - \delta, x_n + \delta] \quad (10.3.41)$$

为使这些 $[x_n - \delta, x_n + \delta]$ 各不相交, 选择 $\delta \in (0, 1)$ 、 $N_1 = a + 1$ 、 $N_{n+1} = x_n + 2$, 此时

$$a < a + 1 - \delta < x_1 - \delta, \quad x_n + \delta < x_n + 1 < x_{n+1} - 1 < x_{n+1} - \delta \quad (10.3.42)$$

又因为 f 非负, 故有

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_n - \delta}^{x_n + \delta} f(x) dx \geq \sum_{n=1}^{+\infty} 2\varepsilon\delta = 2n\varepsilon\delta \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty \quad (10.3.43)$$

与 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛矛盾, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。

(2) 因为 f 一致连续, 故 $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, $\exists \delta \in (0, \varepsilon)$ 使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \geq a, |x_1 - x_2| < \delta \quad (10.3.44)$$

因为 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 由 Cauchy 收敛准则知对上述 δ , $\exists N > a$ 使得

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| < \frac{\delta^2}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \geq N \quad (10.3.45)$$

于是 $\forall x > R$, 取 $x_1, x_2 > R$ 使得 $x_1 < x < x_2$ 且 $x_2 - x_1 = \delta$, 此时有

$$|f(x)\delta| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - f(t)| dt + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\delta + \frac{\delta^2}{2} < \varepsilon\delta \quad (10.3.46)$$

即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > a$ 使得 $x > N \implies |f(x)| < \varepsilon$, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。

(3) 采用反证法。若 $A \neq 0$, 不妨设 $A > 0$, 则取 $\varepsilon = \frac{A}{2}$, $\exists N > a$ 使得

$$x > N \implies f(x) > A - \varepsilon = \frac{A}{2} \implies \int_N^{+\infty} f(x) dx \geq \int_N^{+\infty} \frac{A}{2} dx = +\infty \quad (10.3.47)$$

与题设矛盾, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。

(4) f 单调有界, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 存在。由 (3) 知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。

(5) 命题不成立。设 $n \in \mathbb{N}^*$, 取

$$f(x) = \begin{cases} 2^n(x - n) + 1, & x \in [n - 2^{-n}, n] \\ 2^n(n - x) + 1, & x \in [n, n + 2^{-n}] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10.3.48)$$

则 f 在 $[0, +\infty)$ 上非负、连续且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在, 而

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \times 2 \times 2^{-n} \times 1 = 1 \quad (10.3.49)$$

□

例 10.3.10

判断下列广义积分的敛散性:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \quad (10.3.50)$$

解 当 $\alpha > 1$ 时,

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ 收敛} \quad (10.3.51)$$

由比较判别法知 I 绝对收敛。

当 $\alpha \leq 0$ 时,

$$\left| \int_{2k\pi+\pi/4}^{2k\pi+3\pi/4} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \quad (10.3.52)$$

由 Cauchy 收敛准则知 I 发散。

当 $0 < \alpha \leq 1$ 时, 由 Dirichlet 判别法知 I 收敛, 而

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^\alpha}}_{\text{发散}} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^\alpha} dx}_{\text{收敛}} = +\infty \quad (10.3.53)$$

故 I 不绝对收敛, 即 I 条件收敛。

□

例 10.3.11

判断下列广义积分的敛散性:

- | | | |
|---|---|--|
| (1) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$ | (5) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^{-1}}-1}{x^p \ln(1+x^{-2})} dx$ | (9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^n} dx$ |
| (2) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{x^2} dx$ | (6) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^3}} dx$ | (10) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1} dx$ |
| (3) $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x^2+1}} dx$ | (7) $\int_{-2}^0 \frac{1}{x-\sin x} dx$ | (11) $\int_1^2 \frac{1}{\ln x} dx$ |
| (4) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x} dx$ | (8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx$ | (12) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$ |

解 (1)(2)(3) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = \mathcal{O}(\frac{1}{x^2})$, 收敛。

(4) 令 $t = x^2$ 可得

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{2t} dt \quad (10.3.54)$$

$\cos t$ 的变上限积分有界而 $\frac{1}{2t}$ 单调趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知原积分收敛。然而

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{2t} dt \geq \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{2t} dt = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{4t} dt}_{\text{发散}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{4t} dt}_{\text{收敛}} \quad (10.3.55)$$

故原积分条件收敛。

(5) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\frac{\sqrt{1+x^{-1}}-1}{x^p \ln(1+x^{-2})} = x^{-p} \left(\frac{x}{2} + o(x) \right) \sim \frac{1}{x^{p-1}} \quad (10.3.56)$$

收敛当且仅当 $p-1 > 1$, 即 $p > 2$ 。

(6) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$; 当 $x \rightarrow 1^-$ 时, $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-x}}$; 均收敛。

(7) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x-\sin x} \sim \frac{1}{x^3}$, 发散。

(8) 由例 10.3.4 知其收敛。

(9) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1-\cos x}{x^n} \sim \frac{1}{x^{n-2}}$, 收敛当且仅当 $n-2 < 1$, 即 $n < 3$ 。

(10) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, 收敛。

(11) 令 $t = \ln x$, 则

$$\int_1^2 \frac{1}{\ln x} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{t} dt \geq \int_0^{\ln 2} \frac{1}{t} dt = +\infty \quad (10.3.57)$$

故发散。

(12) 令 $t = -\ln x$, 则

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{1-e^t} \quad (10.3.58)$$

$t=0$ 不是瑕点; 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{t}{1-e^t} = \mathcal{O}(e^{-t/2})$, 收敛。□

例 10.3.12

判断下列广义积分的敛散性:

(1) $\int_0^{+\infty} x \cos(x^3) dx$

(2) $\int_1^{+\infty} x \left(\arctan \frac{2}{x} - \arctan \frac{1}{x} \right) dx$

解 (1) 令 $t = x^3$ 可得

$$\int_0^{+\infty} x \cos(x^3) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{3\sqrt[3]{t}} dt = \underbrace{\int_0^1 \frac{\cos t}{3\sqrt[3]{t}} dt}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{3\sqrt[3]{t}} dt}_{I_2} \quad (10.3.59)$$

对于 I_1 , 有 $\frac{|\cos t|}{3\sqrt[3]{t}} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{t}}$, 故比较判别法知 I_1 绝对收敛。

对于 I_2 , $\cos t$ 的变上限积分有界而 $\frac{1}{3\sqrt[3]{t}}$ 单调趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知原积分收敛。然而

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{3\sqrt[3]{t}} dt \geq \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{3\sqrt[3]{t}} dt = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{6\sqrt[3]{t}} dt}_{\text{发散}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{6\sqrt[3]{t}} dt}_{\text{收敛}} \quad (10.3.60)$$

故 I_2 条件收敛, 即原积分条件收敛。

(2) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$x \left(\arctan \frac{2}{x} - \arctan \frac{1}{x} \right) = x \left[\frac{2}{x} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 1 + o(1) \quad (10.3.61)$$

故原积分发散。 □

例 10.3.13

判断下列广义积分的敛散性:

$$I = \int_1^{+\infty} x \sin x \sin x^4 dx \quad (10.3.62)$$

解 作换元 $t = x^4$, 代入可得

$$I = \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{\sin t \sin \sqrt[4]{t}}{\sqrt{t}} dt \quad (10.3.63)$$

由于 $\frac{1}{\sqrt{t}}$ 单调趋于 0, 我们尝试利用 Dirichlet 判别法, 即证明 $\sin t \sin \sqrt[4]{t}$ 的变上限积分有界。通过不断地分部积分, 让分母的次数大于 1, 即

$$\begin{aligned} \int_1^x \sin t \sin \sqrt[4]{t} dt &= - \int_1^x \sin \sqrt[4]{t} d \cos t = - \sin \sqrt[4]{t} \cos t \Big|_1^x + \int_1^x \frac{\cos t \cos \sqrt[4]{t}}{4t^{3/4}} dt \\ &= C_1(x) + \int_1^x \frac{\cos \sqrt[4]{t}}{4t^{3/4}} d \sin t = C_1(x) + \frac{\cos \sqrt[4]{t} \sin t}{4t^{3/4}} \Big|_1^x - \int_1^x \sin t d \frac{\cos \sqrt[4]{t}}{4t^{3/4}} \\ &= C_1(x) + C_2(x) + \frac{3}{16} \int_1^x \frac{\sin t \cos \sqrt[4]{t}}{t^{7/4}} dt - \frac{1}{16} \int_1^x \frac{\sin t \sin \sqrt[4]{t}}{t^{3/2}} dt \end{aligned} \quad (10.3.64)$$

因此

$$\begin{aligned} \left| \int_1^x \sin t \sin \sqrt[4]{t} dt \right| &\leq |C_1(x)| + |C_2(x)| + \frac{3}{16} \int_1^x \frac{|\sin t \cos \sqrt[4]{t}|}{t^{7/4}} dt + \frac{1}{16} \int_1^x \frac{|\sin t \sin \sqrt[4]{t}|}{t^{3/2}} dt \\ &\leq 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{3}{16} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{7/4}} + \frac{1}{16} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} \leq 3 \end{aligned} \quad (10.3.65)$$

由 Dirichlet 判别法知原积分收敛。为了判断其是否绝对收敛, 即考虑以下积分的敛散性:

$$\int_1^{+\infty} |x \sin x \sin x^4| dx \stackrel{t=x^4}{=} \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t \sin \sqrt[4]{t}|}{\sqrt{t}} dt \quad (10.3.66)$$

可以利用 Cauchy 收敛准则, 即考虑

$$\int_{(k\pi+\frac{\pi}{6})^4}^{(k\pi+\frac{5\pi}{6})^4} \frac{|\sin t \sin \sqrt[4]{t}|}{\sqrt{t}} dt \geq \int_{(k\pi+\frac{\pi}{6})^4}^{(k\pi+\frac{5\pi}{6})^4} \frac{\sin^2 t}{2\sqrt{t}} dt = \int_{(k\pi+\frac{\pi}{6})^4}^{(k\pi+\frac{5\pi}{6})^4} \frac{1 - \cos 2t}{4\sqrt{t}} dt \quad (10.3.67)$$

由于 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{4\sqrt{t}} dt$ 收敛, 故可取充分大的 k 使得 $(k\pi)^4 > N$, 其中 N 满足

$$b > a > N \implies \left| \int_a^b \frac{\cos 2t}{4\sqrt{t}} dt \right| < 1 \quad (10.3.68)$$

因此

$$\int_{(k\pi+\frac{\pi}{6})^4}^{(k\pi+\frac{5\pi}{6})^4} \frac{|\sin t \sin \sqrt[4]{t}|}{\sqrt{t}} dt \geq \frac{\sqrt{t}}{2} \Big|_{(k\pi+\frac{\pi}{6})^4}^{(k\pi+\frac{5\pi}{6})^4} - 1 = \frac{2\pi^2}{3}k + \frac{\pi^2}{3} - 1 \rightarrow +\infty \quad (10.3.69)$$

故原积分不绝对收敛, 即原积分条件收敛。 \square

注 本题本质上与证明 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 条件收敛相同, 都是先用 Dirichlet 判别法证明其收敛, 再用 Cauchy 收敛准则证明其不绝对收敛。为了控制被积函数的 $\sin t$ 和 $\sin \sqrt[4]{t}$, 注意到 $\sin \sqrt[4]{t}$ 的零点间隔是 4 次方, 大于 $\sin t$ 的零点间隔, 故我们先控制 $\sin \sqrt[4]{t}$, 并在其零点间隔内控制 $\sin t$ 。当然, 上面的过程我们直接利用了放缩 $|\sin t| \geq \sin^2 t$, 可使证明更加简单。

10.3.4 杂题

例 10.3.14

计算以下广义积分:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} & (3) \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} & (5) \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \\ (2) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx & (4) \int_0^1 \ln^2 x dx & (6) \int_0^1 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1-x}} \end{array}$$

解 (1)

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} \stackrel{y=x^{-1}}{=} \int_0^1 \frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = \sqrt{1+y^2} \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1 \quad (10.3.70)$$

(2)

$$\int \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx \stackrel{x=\tan t}{=} \int t \cos t dt = t \sin t + \cos t = \frac{x \arctan x + 1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (10.3.71)$$

从而

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \arctan x + 1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \quad (10.3.72)$$

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \stackrel{x=\sec t}{=} -\int_{\pi/3}^{\pi/2} dt = -\frac{\pi}{6} \quad (10.3.73)$$

$$(4) \quad \int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \implies \int_0^1 \ln^2 x dx = 2 \quad (10.3.74)$$

$$(5) \quad \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \implies \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \pi \quad (10.3.75)$$

$$(6) \quad \int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1-x}} \stackrel{t=\sqrt{1-x}}{=} \int \frac{2 dt}{t^2-3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{3}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{3}} \right| \quad (10.3.76)$$

从而

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{3}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{3}} \right| \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \quad (10.3.77)$$

□

例 10.3.15

计算以下广义积分:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} \quad (10.3.78)$$

解 由于 $\frac{1}{1+x^3} \leq \frac{1}{x^3}$, 利用比较判别法可知积分收敛。直接应用有理函数积分法较为繁琐, 对于(广义)定积分我们可以采用另一种方法。记

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} \quad (10.3.79)$$

注意到

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} \stackrel{t=x^{-1}}{=} \int_0^1 \frac{t dt}{1+t^3} \quad (10.3.80)$$

故

$$\begin{aligned} I = I_1 + I_2 &= \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^3} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (10.3.81)$$

□

例 10.3.16

判断下列广义积分的敛散性:

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln \ln x)^r} \quad (10.3.82)$$

解 (1) 若 $p > 1$, 对充分大的 x , 有

$$\frac{1}{(\ln x)^q(\ln \ln x)^r} < 1 \implies \frac{1}{x^p(\ln x)^q(\ln \ln x)^r} < \frac{1}{x^p} \quad (10.3.83)$$

而广义积分 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 收敛, 故原广义积分收敛。(2) 若 $p < 1$, 对充分大的 x , 有

$$(\ln x)^q(\ln \ln x)^r < x^{(1-p)/2} \implies \frac{1}{x^p(\ln x)^q(\ln \ln x)^r} > \frac{1}{x^{(1+p)/2}} \quad (10.3.84)$$

而广义积分 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^{(1+p)/2}}$ 发散, 故原广义积分发散。(3) 若 $p = 1$, 此时积分可化为

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^q(\ln \ln x)^r} \stackrel{t=\ln x}{=} \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^q(\ln t)^r} \quad (10.3.85)$$

同理可得 $q > 1$ 时收敛, $q < 1$ 时发散。 $q = 1$ 时, 积分可化为

$$\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^r} \stackrel{u=\ln t}{=} \int_{\ln \ln 3}^{+\infty} \frac{du}{u^r} \quad (10.3.86)$$

故 $r > 1$ 时收敛, $r \leq 1$ 时发散。 \square

例 10.3.17

判断下列广义积分的敛散性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p} dx \quad (2) \int_0^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \right] dx \quad (3) \int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx$$

解 (1) 记

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^p} dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p} dx, \quad I = I_1 + I_2 \quad (10.3.87)$$

对于 I_1 , 当 $x \rightarrow 0$ 时有 $\frac{\arctan x}{x^p} \sim \frac{1}{x^{p-1}}$, 故 I_1 收敛当且仅当 $p-1 < 1$, 即 $p < 2$ 。对于 I_2 , 当 $x \rightarrow +\infty$ 时有 $\frac{\arctan x}{x^p} \sim \frac{\pi}{2x^p}$, 故 I_2 收敛当且仅当 $p > 1$ 。综上, I 收敛当且仅当 $1 < p < 2$ 。

(2) 记

$$I_1 = \int_0^1 \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \right] dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \right] dx, \quad I = I_1 + I_2 \quad (10.3.88)$$

对于 I_1 , 当 $x \rightarrow 0$ 时有 $\left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \right] \sim -\ln x$, 故 I_1 收敛。

对于 I_2 , 当 $x \rightarrow +\infty$ 时有 $\left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \right] \sim \frac{1}{2x^2}$, 故 I_2 收敛。

综上, I 收敛。

(3) 原积分显然不绝对收敛。令 $t = x^2$ 可得

$$\int_0^{+\infty} (-1)^{\lfloor x^2 \rfloor} dx = \int_0^{+\infty} (-1)^{\lfloor t \rfloor} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \quad (10.3.89)$$

$(-1)^{\lfloor t \rfloor}$ 的变上限积分有界而 $\frac{1}{2\sqrt{t}}$ 单调趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知原积分收敛, 即原积分条件收敛。□

例 10.3.18

判断下列广义积分的敛散性:

(1) $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \sin x}{x+1} dx$

(3) $\int_0^{+\infty} x^p \sin x^q dx$

解 (1) 令 $t = x^2$ 可得

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \sin t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \quad (10.3.90)$$

$\sin t$ 的变上限积分有界而 $\frac{1}{2\sqrt{t}}$ 的单调趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知原积分收敛。然而

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}} dt \geq \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{2\sqrt{t}} dt = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin^2 t}{2\sqrt{t}} dt}_{\text{收敛}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2\sqrt{t}}}_{\text{发散}} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{4\sqrt{t}} dt}_{\text{收敛}} \quad (10.3.91)$$

故原积分不绝对收敛, 即原积分条件收敛。

(2) 注意到 $\cos x$ 的变上限积分有界而 $\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$ 在 $x > 1$ 时单调趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知原积分收敛。然而

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} |\sin x|}{2(1+x)} dx \geq \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \sin^2 x}{2(1+x)} dx = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{4(1+x)}}_{\text{发散}} - \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos 2x}{4(1+x)} dx}_{\text{收敛}} \quad (10.3.92)$$

故原积分不绝对收敛, 即原积分条件收敛。

(3) 若 $q = 0$, 原积分必然在 $x = 0$ 或 $x = +\infty$ 之一处发散, 故原积分发散。若 $q \neq 0$, 令 $t = x^q$ 可得

$$I = \frac{1}{|q|} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\mu} dt, \quad \mu = 1 - \frac{p+1}{q} \quad (10.3.93)$$

当 $t \rightarrow 0$ 时, 有 $\frac{\sin t}{t^\mu} \sim \frac{1}{t^{\mu-1}}$, 故 I 收敛当且仅当 $\mu - 1 < 1$, 即 $\mu < 2$, 且此时为绝对收敛。

当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 由例 10.3.10 可知 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\mu} dt$ 在 $\mu > 1$ 时绝对收敛, 在 $0 < \mu \leq 1$ 时条件收敛, 在 $\mu \leq 0$ 时发散。

综上, 原积分在 $q \neq 0$ 且 $1 < \mu < 2$ 时绝对收敛, $q \neq 0$ 且 $0 < \mu \leq 1$ 时条件收敛, 其余情况发散。 \square

例 10.3.19

设 f 在 \mathbb{R} 上内闭 Riemann 可积, 并且

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B \quad (10.3.94)$$

其中 $A, B \in \mathbb{R}$ 。证明: $\forall a > 0$, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+a) - f(x)] dx$ 存在, 并求它的值。

证明 本题只需证明以下极限存在:

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow -\infty \\ \beta \rightarrow +\infty}} \int_{\alpha}^{\beta} [f(x+a) - f(x)] dx \quad (10.3.95)$$

由积分中值定理可得

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} [f(x+a) - f(x)] dx &= \int_{\alpha+a}^{\beta+a} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\beta}^{\beta+a} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\alpha+a} f(x) dx \\ &= f(\xi_{\beta})a - f(\xi_{\alpha})a \end{aligned} \quad (10.3.96)$$

其中 $\xi_{\beta} \in (\beta, \beta+a)$, $\xi_{\alpha} \in (\alpha, \alpha+a)$ 。令 $\alpha \rightarrow -\infty, \beta \rightarrow +\infty$ 可得

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow -\infty \\ \beta \rightarrow +\infty}} \int_{\alpha}^{\beta} [f(x+a) - f(x)] dx = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow -\infty \\ \beta \rightarrow +\infty}} [f(\xi_{\beta}) - f(\xi_{\alpha})]a = (B - A)a \quad (10.3.97)$$

\square

例 10.3.20

设 $\int_a^{+\infty} f dx$ 条件收敛, 证明: 广义积分 $\int_a^{+\infty} (|f| \pm f) dx$ 发散, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^x (|f| + f) dt}{\int_a^x (|f| - f) dt} = 1 \quad (10.3.98)$$

解 假设 $\int_a^{+\infty} (|f| \pm f) dx$ 收敛, 由于 $|f| = (|f| \pm f) \mp f$, 则 $\int_a^{+\infty} |f| dx$ 也收敛, 与 $\int_a^{+\infty} f dx$ 条件收敛矛盾。故 $\int_a^{+\infty} (|f| \pm f) dx$ 发散。注意到

$$\frac{\int_a^x (|f| + f) dt}{\int_a^x (|f| - f) dt} - 1 = \frac{2 \int_a^x f dt}{\int_a^x (|f| - f) dt} \quad (10.3.99)$$

上式分子收敛, 为有限数; 分母发散且为非负数, 故为 $+\infty$ 。取极限可得上式为 0, 即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^x (|f| + f) dt}{\int_a^x (|f| - f) dt} = 1 \quad (10.3.100)$$

□

例 10.3.21

设 f 在 $[a, +\infty)$ 上可导, 且广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x) dx$ 均收敛。证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。

证明 由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(a) + \int_a^x f'(t) dt \right] = f(a) + \int_a^{+\infty} f'(t) dt \quad (10.3.101)$$

故极限存在。由例 10.3.9(3) 知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。

□

例 10.3.22

设 $a > 0$, f 在 $[a, +\infty)$ 上平方可积, 证明: $\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛。

证明 利用 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\int_a^{+\infty} \frac{|f(x)|}{x} dx \leq \left(\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \right)^{1/2} \left(\int_a^{+\infty} f^2(x) dx \right)^{1/2} \quad (10.3.102)$$

后两个积分均收敛, 故原积分绝对收敛。

□

例 10.3.23

设 f 在 $[a, +\infty)$ 上内闭 Riemann 可积, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。

(1) 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛, 证明: $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛。

(2) 若 f 在 $[a, +\infty)$ 上单调递减, $f' \in \mathcal{C}[0, +\infty)$, 证明: $\int_0^{+\infty} f'(x) \sin^2 x dx$ 收敛。

证明 (1) 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 可知 $\exists N > a$ 使得 $x > N \implies |f(x)| < 1$ 。故

$$\int_a^{+\infty} f^2(x) dx = \int_a^N f^2(x) dx + \int_N^{+\infty} f^2(x) dx \leq \int_a^N f^2(x) dx + \int_N^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \quad (10.3.103)$$

由比较判别法知 $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛。

(2) 由分部积分可得

$$\int_0^{+\infty} f'(x) \sin^2 x \, dx = f(x) \sin^2 x \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(x) \sin 2x \, dx = - \int_0^{+\infty} f(x) \sin 2x \, dx \quad (10.3.104)$$

$\sin 2x$ 的变上限积分有界而 f 单调趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知原积分收敛。□

例 10.3.24

设 γ 为 Euler 常数, 证明:

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx = \gamma \quad (10.3.105)$$

证明 注意到当 $x \geq 2$ 时有

$$[x] \leq x < [x] + 1 \implies \frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x^2} \quad (10.3.106)$$

由比较判别法知原积分收敛, 再由 Heine 定理知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \left(\frac{1}{[t]} - \frac{1}{t} \right) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \left(\frac{1}{[t]} - \frac{1}{t} \right) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma \quad (10.3.107)$$

□

例 10.3.25

设 $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ 收敛。

(1) 若 f 在 $[a, +\infty)$ 上单调, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$ 。

(2) 若 f 在 $[a, +\infty)$ 上单调、可微, 证明: $\int_a^{+\infty} xf'(x) \, dx$ 收敛。

证明 (1) 不妨设 f 单调减, 则 $f(x) \geq 0$ 。由于 $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ 收敛, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > a$ 使得

$$x > 2N \implies \left| \int_{x/2}^x f(t) \, dt \right| = \int_{x/2}^x f(t) \, dt < \varepsilon \quad (10.3.108)$$

又 f 在 $[a, +\infty)$ 上单调递减, 故

$$0 \leq \frac{x}{2} f(x) \leq \int_{x/2}^x f(t) \, dt < \varepsilon \implies 0 \leq xf(x) < 2\varepsilon \quad (10.3.109)$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$ 。

(2) 注意到

$$\int_a^x f(t) \, dt = xf(x) - af(a) - \int_a^x tf'(t) \, dt \quad (10.3.110)$$

令 $x \rightarrow +\infty$ 知 $\int_a^{+\infty} xf'(x) \, dx$ 收敛。□

第 11 次习题课 常微分方程

2023 年 12 月 25 日, 2024 年 12 月 12 日, 2025 年 12 月 24 日。本节对应微积分 A(1) 第 12 次习题课的内容。

11.1 知识点复习

11.1.1 微分方程的基本概念

一般地, n 阶 (常) 微分方程可以表示为

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (11.1.1)$$

其中 x 是自变量、 y 是未知函数。设 y 在区间 I 上连续且有直到 n 阶的导数, 若 y 满足以上方程, 则称 y 是方程在区间 I 上的一个解, I 称作该解的**存在区间**。如果关系式 $f(x, y) = 0$ 确定的隐函数 $y(x)$ 是方程的解, 则称 $f(x, y) = 0$ 为方程的**隐式解**, 也可略称作**解**¹。

若方程的解 y 包含 n 个独立的任意常数, 则称其为**通解**; 若方程的解 y 不包含任意常数, 则称其为**特解**。需要十分注意的是, 通解并不一定包含所有的特解。

11.1.2 线性微分方程解的结构

称 F 为**线性微分方程**, 若其可表示为

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (11.1.2)$$

定义线性微分算子

$$\mathcal{L} = \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x) \quad (11.1.3)$$

则原方程可表示为

$$\mathcal{L}y = f \quad (11.1.4)$$

¹参考: 谢惠民, 恽自求, 易法槐, 钱定边: 数学分析习题课讲义 (第 2 版) (上册)。

称 F 为齐次线性方程, 若 $f = 0$; 否则称 F 为非齐次线性方程。容易验证以下事实 (即线性叠加原理):

- (1) 若 y_1, y_2 是齐次线性方程的解, 则 $y_1 + y_2$ 也是齐次线性方程的解。
- (2) 若 y_1 是齐次线性方程的解, 则 cy_1 也是齐次线性方程的解。
- (3) 若 y_1 是非齐次线性方程的解, y_2 是对应的齐次线性方程的解, 则 $y_1 + y_2$ 也是非齐次线性方程的解。
- (4) 若 y_1, y_2 是非齐次线性方程的解, 则 $y_1 - y_2$ 是对应的齐次线性方程的解。

因此

- (1) 齐次线性方程的解构成一个线性空间 V , 它的维数为 n 。
- (2) 非齐次线性方程的解构成一个仿射空间 $V + y_0$, 其中 y_0 是非齐次线性方程的一个特解, 它的维数为 n 。
- (3) 可以将非齐次项分解为 $f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_k f_k$, 则 $\mathcal{L}y = f$ 的通解可以表示为 $\mathcal{L}y = f_k$ 的通解的线性组合。

11.1.3 分离变量法

求解一阶微分方程的核心思路是分离变量法, 即形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (11.1.5)$$

的方程, 其通解为

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C \quad (11.1.6)$$

除了最基本的形式以外, 常见的可分离变量的微分方程有:

- (1) 齐次方程:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} \quad (11.1.7)$$

- (2) 仅含 $ax + by + c$ 的方程:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \xrightarrow{u=ax+by+c} \frac{du}{dx} = a + bf(u) \quad (11.1.8)$$

- (3) 仅含 $\frac{ax+by+c}{cx+dy+f}$ (其中 $c^2 + d^2 \neq 0$) 的方程:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax + by + e}{cx + dy + f}\right) \quad (11.1.9)$$

- 若 $ad - bc \neq 0$, 则方程组 $\begin{cases} ax + by + e = 0 \\ cx + dy + f = 0 \end{cases}$ 有唯一解 (x_0, y_0) , 令 $u = x - x_0, v = y - y_0$, 则方程化为

$$\frac{dv}{du} = F\left(\frac{au + bv}{cu + dv}\right) = F\left(\frac{a + b\frac{v}{u}}{c + d\frac{v}{u}}\right) = g\left(\frac{v}{u}\right) \quad (11.1.10)$$

- 若 $ad - bc = 0$, 则必存在 $k \in \mathbb{R}$ 使得 $ax + by = k(cx + dy)$, 则方程化为

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax + by + e}{cx + dy + f}\right) = F\left(\frac{k(cx + dy) + e}{cx + dy + f}\right) = g(cx + dy) \quad (11.1.11)$$

11.1.4 恰当方程与平面向量场的正交曲线族

一阶微分式形式的微分方程 (又称为**恰当方程**) 具有形式

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (11.1.12)$$

其中 x, y 的地位是对等的, 不再强调谁是自变量、谁是因变量。 (x, y) 坐标平面中的曲线 $\gamma: t \mapsto (x(t), y(t))$ 是它的积分曲线, 当且仅当

$$P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0 \quad (11.1.13)$$

在直角坐标系中, (P, Q) 是点 (x, y) 处的一个向量, 这给出了平面上一个**向量场**。 γ 是恰当方程的积分曲线, 当且仅当它在其所经之处 (的切向量) 总是与向量场 (P, Q) 正交。所以恰当方程的通解就是向量场 (P, Q) 的**正交曲线族**。

11.1.5 一阶线性微分方程

对于一阶齐次线性方程

$$y' + a(x)y = 0 \quad (11.1.14)$$

其可以分离变量。设 A 是 a 的一个原函数, 则其通解为

$$y = Ce^{-A(x)} = y(x_0) \exp\left[-\int_{x_0}^x a(t) dt\right] \quad (11.1.15)$$

也可以直接配凑**积分因子**, 即

$$[e^{A(x)}y]' = e^{A(x)}[y' + a(x)y] = 0 \implies y = Ce^{-A(x)} \quad (11.1.16)$$

对于一阶非齐次线性方程

$$y' + a(x)y = f(x) \quad (11.1.17)$$

可以采用**常数变易法** (不是常数变易法)。已知齐次方程的通解为 $y = Ce^{-A(x)}$, 则原方程的通解可设为

$$y = C(x)e^{-A(x)} \implies C'(x)e^{-A(x)} = f(x) \implies C'(x) = f(x)e^{A(x)} \quad (11.1.18)$$

因此

$$y = e^{-A(x)} \left[\int_{x_0}^x f(t)e^{A(t)} dt + C \right] = \underbrace{Ce^{-A(x)}}_{\text{齐次方程通解}} + \underbrace{e^{-A(x)} \int_{x_0}^x f(t)e^{A(t)} dt}_{\text{非齐次方程特解}} \quad (11.1.19)$$

也可以采用积分因子法, 即

$$[e^{A(x)}y]' = e^{A(x)}[y' + a(x)y] = e^{A(x)}f(x) \implies y = e^{-A(x)} \left[\int_{x_0}^x f(t)e^{A(t)} dt + C \right] \quad (11.1.20)$$

若 a, f 均连续, 则对任意 (x_0, y_0) , 一阶线性微分方程 $y' + a(x)y = f(x)$ 有唯一解满足初始条件 $y(x_0) = y_0$.

11.1.6 可线性化的一阶非线性微分方程

形如

$$y' + a(x)y = b(x)y^\nu \quad (11.1.21)$$

的方程称为 **Bernoulli 方程**, 其中 $\nu \neq 0, 1$ 。令 $z = y^{1-\nu}$, 则

$$z' = (1-\nu)y^{-\nu}y' = (1-\nu)y^{-\nu}(b(x)y^\nu - a(x)y) = (1-\nu)[b(x) - a(x)z] \quad (11.1.22)$$

形如

$$y'(x) = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2 \quad (11.1.23)$$

的方程称为 **Riccati 方程**, 其中 $q_2(x) \neq 0$ 。令 $v = yq_2$, 则

$$v' = y'q_2 + yq_2' = q_0q_2 + \left(q_1 + \frac{q_2'}{q_2} \right) v + v^2 =: S(x) + R(x)v + v^2 \quad (11.1.24)$$

再令 $v = -\frac{u'}{u}$, 则

$$v' = -\frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2} = -\frac{u''}{u} + v^2 = S(x) - R(x)\frac{u'}{u} + v^2 \quad (11.1.25)$$

因此

$$u'' - R(x)u' + S(x)u = 0 \quad (11.1.26)$$

11.1.7 高阶线性方程和线性微分方程组

对于 n 阶线性方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (11.1.27)$$

可令 $\mathbf{y} = (y, y', \cdots, y^{(n-1)})$, 则有

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \quad (11.1.28)$$

因此我们只需要关注线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \quad (11.1.29)$$

我们考虑一个简单的情形：若 A 与 x 无关，即常系数线性微分方程组，我们可以“形式地”仿照一阶线性微分方程那样，令

$$[e^{Ax}\mathbf{y}]' = e^{Ax}[\mathbf{y}' + A\mathbf{y}] = e^{Ax}\mathbf{b}(x) \implies \mathbf{y} = e^{-Ax} \left[\int e^{Ax}\mathbf{b}(x) dx + \mathbf{c} \right] \quad (11.1.30)$$

那么这里的 e^A 是什么呢？仿照实数中的 Taylor 展开，我们可以定义方阵的**矩阵指数**为

$$\exp A = e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (11.1.31)$$

其运算结果仍是一个方阵，且与 A 对易。可以证明这个级数对所有方阵 A 都收敛，且有

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} \frac{(Ax)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} \frac{A^k}{k!} = A \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(Ax)^k}{k!} = Ae^{Ax} \quad (11.1.32)$$

因此

$$\mathbf{y} = e^{Ax}\mathbf{b}(x) \implies \mathbf{y} = e^{-Ax} \left[\int_{x_0}^x e^{At}\mathbf{b}(t) dt + \mathbf{c} \right] \quad (11.1.33)$$

确为常系数线性微分方程组的通解。

如何计算矩阵指数呢？我们可以将矩阵 A 对角化，即 $A = P\Lambda P^{-1}$ ，其中 Λ 是对角矩阵、其对角元为 A 的特征值， P 是可逆矩阵、其列向量是 A 的特征向量。则

$$e^A = e^{P\Lambda P^{-1}} = Pe^{\Lambda}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \quad (11.1.34)$$

如果矩阵 A 不可对角化，我们可以将其分解为 $A = S + N$ ，其中 S 可对角化， N 是幂零矩阵（即存在 $k \in \mathbb{N}^*$ 使得 $N^k = 0$ ）且 S, N 对易，此时我们有

$$e^A = e^{S+N} = e^S e^N = e^S \sum_{k=0}^{k-1} \frac{N^k}{k!} \quad (11.1.35)$$

一种常见的分解方式利用了 **Jordan 标准形**，即 $A = PJP^{-1}$ ，其中 J 是 Jordan 块矩阵，其对角元为 A 的特征值、上三角第一副对角线元素为 0 或 1，其余元素均为 0。设 $J = \Lambda + U$ ，其中 Λ 为 J 的对角部分， U 为 J 的上三角部分，则

$$S = P\Lambda P^{-1}, \quad N = PUP^{-1} \quad (11.1.36)$$

容易验证 S, N 即为满足要求的分解。

11.1.1.8 一阶微分方程和斜率场

在坐标平面的每个点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 处，微分方程 $y' = f(x, y)$ 给出一个斜率值 $f(x, y)$ ，这样形成一个**斜率场**（也称为**方向场**）。微分方程的解 $y = f(x)$ 的函数图像（称为斜率场的**积分曲线**）所经之处的切线斜率都与斜率场的值相同。

Mathematica 中的 `VectorPlot` 函数可以绘制斜率场，示例代码如图 11.1.1 所示。

```

In[1]:= SlopePlot[f_, xval_, yval_, cval_] := Module[{
    模块
    F = f /. {xval[[1]] -> x, yval[[1]] -> y[x]},
    vec = VectorPlot[{1, f}, xval, yval, VectorAspectRatio -> 1/6]
    向量图 向量箭头符号的长宽比
},
Manipulate[Module[{s = NDSolve[{y'[x] == F, y[0] == cval[[1]]}, y[x], {x, xval[[2]], xval[[3]]}],
    交互式操作 模块 数值求解微分方程组
    Show[vec, Plot[y[x] /. s, {x, xval[[2]], xval[[3]]}, PlotRange -> {yval[[2]], yval[[3]}]]],
    显示 绘图 绘制范围
    cval]]

In[2]:= SlopePlot[x y (1 - x), {x, -6, 6}, {y, -6, 6}, {c, -5, 5, Appearance -> "Labeled"}]
    外观

```

图 11.1.1: 绘制斜率场的示例代码

11.1.9 利用数值方法验证微分方程的解

求解出微分方程的解后，我们还可以利用数值方法对其进行验证，图 11.1.2 展示了如何在 Wolfram Mathematica 中实现该过程。具体而言，我们可以通过 NDSolve 函数数值求解初值问题，然后将数值解与显函数、隐函数或参数方程形式的解进行作图对比（分别用 Plot、ContourPlot、ParametricPlot）；如果数值解与解析解在图像上高度重合，则说明解析解是正确的。

若要更加精确地验证解析解的正确性，可以计算数值解与解析解在某些点处的误差，例如利用 Table 函数计算两者在若干点处的差值，然后观察这些差值是否足够小。

```

In[1]:= s = NDSolve[{y'[x] == - $\frac{y[x] e^{xy[x]} + \cos[x]}{x e^{xy[x]}}$ , y[1] == 0},
    数值求解微分方程组

```

```
y[x], {x, 1, 2}];
```

```
p1 = Plot[y[x] /. s, {x, 1, 2}, PlotStyle -> Red];
```

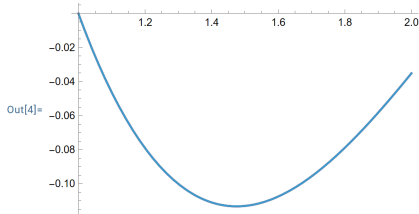
```
 绘图 绘图样式 红色
```

```
p2 = Plot[ $\frac{\log[1 + \sin[1] - \sin[x]]}{x}$ , {x, 1, 2}];
```

```
 绘图
```

```
Show[p1, p2]
```

```
 显示
```



(a) 例 11.2.7(2): 显函数

```

In[5]:= s = NDSolve[{y'[x] ==  $\frac{x^2(y[x] - 2x^3)}{2y[x] + 3x^3}$ , y[1] == 1},
    数值求解微分方程组

```

```
y[x], {x, 1, 2}];
```

```
p1 = Plot[y[x] /. s, {x, 1, 2}, PlotStyle -> Red];
```

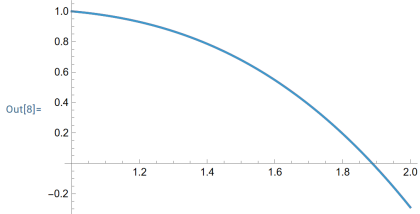
```
 绘图 绘图样式 红色
```

```
p2 = ContourPlot[(x^3 + 3y)^7 == 2^11 (x^3 + y)^3, {x, 1, 2},
```

```
{y, -1, 1}];
```

```
Show[p1, p2]
```

```
 显示
```



(b) 例 11.2.6: 隐函数

```

In[1]:= u[a_, phi_] :=  $\frac{\log[\cos[\frac{\pi}{4} + (1+a)\phi]] + \frac{1}{2}\log[2]}{1+a} + 1$ 

```

```
s = NDSolve[{ $\frac{y''[x]}{1+y'[x]^2} + 2\frac{xy'[x]-y[x]}{x^2+y[x]^2} == 0$ , y[e] == 0,
```

```
y'[e] == 1}, y[x], {x, e, 7}];
```

```
p1 = Plot[y[x] /. s, {x, e, 7}, PlotStyle -> Red];
```

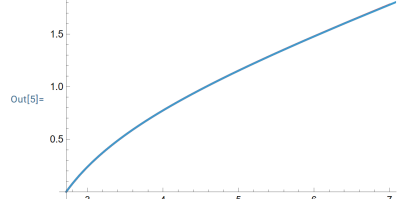
```
 绘图 绘图样式 红色
```

```
p2 = ParametricPlot[e^{w[2,phi]} {Cos[phi], Sin[phi]}, {phi, 0,  $\frac{\pi}{12}$ };
```

```
 绘制参数曲线 清除 正弦
```

```
Show[p1, p2]
```

```
 显示
```



(c) 例 11.2.8: 参数方程

图 11.1.2: 如何在 Wolfram Mathematica 中数值验证微分方程的解

11.2 雨课堂作业

例 11.2.1 (作业第 1 题, 习题 8.2.1)

求区间 $[0, +\infty)$ 上的可微函数 f 使得

$$\ln |f(x)| + \int_0^x f(t) dt = 0 \quad (11.2.1)$$

解 令 $x = 0$ 可得

$$\ln |f(0)| = 0 \implies f(0) = \pm 1 \quad (11.2.2)$$

由于 f 可微, 对积分方程两边求导可得

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + f(x) = 0 \implies -\frac{df}{f^2} = dx \quad (11.2.3)$$

两边积分可得

$$\frac{1}{f(x)} = x + C \implies f(x) = \frac{1}{x + C} \quad (11.2.4)$$

由 $f(0) = \pm 1$ 可得 $C = \pm 1$; $C = -1$ 需要舍去, 因为此时 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处间断。因此 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ 。 \square

例 11.2.2 (作业第 2 题, 习题 8.2.2)

求解微分方程 $y' = 2xy^2$, 并回答以下问题:

- (1) 证明: $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall y_0 \neq 0$, 该方程存在唯一解满足初始条件 $y(x_0) = y_0$, 且在它的定义域中总有 $y(x) \neq 0$ 。
- (2) 对 (1) 中的解 $y(x)$, 求它的定义域。
- (3) 证明: $\forall x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, 该方程有唯一解满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 。
- (4) 写出该方程的通解, 并证明通解并非该方程的全部解。

注 在讨论微分方程的解时, 我们通常只在解的存在区间上关注解的性质 (存在性、唯一性、适定性)。

引理 11.2.3

设 f 在区间 $[a, b]$ 上单调不减且满足 $f(a) = 0, f(b) > 0$ 。证明: $\exists \xi \in [a, b)$ 使得 $(\forall x < \xi) f(x) = 0$ 且 $(\forall x > \xi) f(x) > 0$ 。

证明 令 $[a_0, b_0] = [a, b]$, 考虑 $\xi_n = \frac{a_n + b_n}{2}$:

- 若 $f(\xi_n) = 0$ 则令 $a_{n+1} = \xi_n$, 即 $f(a_{n+1}) = 0$.
- 若 $f(\xi_n) > 0$ 则令 $b_{n+1} = \xi_n$, 即 $f(b_{n+1}) > 0$.

由有界闭区间套定理以及 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$ 知 $\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}$ 且 $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$, 此时

- $\forall x < \xi, \exists N > 0$ 使得 $n > N \implies x < a_n \implies f(x) \leq f(a_n) = 0$.
- $\forall x > \xi, \exists N > 0$ 使得 $n > N \implies x > b_n \implies f(x) \geq f(b_n) > 0$.

故引理成立。进一步地, 若 f 连续, 则

$$f(\xi) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = 0 \quad (11.2.5)$$

□

解 (1) 设 y 在区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上恒有定义且 $x_0 \in I$, 此时 I 连通, 下面我们只在 I 上考虑 $y(x)$ 。首先证明: (结论 I) 若 $y(x) \neq 0$, 则该方程存在唯一解满足 $y(x_0) = y_0$ 。考虑函数

$$g(x) = \frac{1}{y(x)} + x^2 \implies g'(x) = 0 \quad (11.2.6)$$

由 Lagrange 中值定理可得 $\forall x \in I$ 且 $x \neq x_0$, 存在 x, x_0 之间的 ξ 满足

$$g(x) - g(x_0) = g'(\xi)(x - x_0) = 0 \implies y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + x_0^2 - x^2} \quad (11.2.7)$$

因此原方程具有唯一解, 且此解满足 $y(x) \neq 0$ 。

然后证明: (结论 II) 若 $y_0 \neq 0$ 且 $0 \notin I$, 则 $y(x) \neq 0$ 。当 $0 \notin I$ 时 y 具有单调性, 故不妨设 $y_0 > 0$ 且 y 在 I 上单调不减。假设 $\exists \xi \in I$ 使得 $y(\xi) = 0$, 则 $\xi < x_0$, 由引理知 $\exists \eta \in [\xi, x_0)$ 满足 $y(\eta) = 0$ 且 $(\forall x > \eta)y(x) > 0$, 在 $[\eta, x_0)$ 上应用结论 I 可知原方程有唯一解 $y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + x_0^2 - x^2}$, 然而此时 $y(\eta) \neq 0$, 矛盾! 故 $y(x) \neq 0$ 。

最后证明: (结论 III) 若 $y_0 \neq 0$, 则 $y(x) \neq 0$ 。结论 II 已证明 $0 \notin I$ 的情况; 当 $0 \in I$ 时, 分别在 $I \cap (-\infty, 0]$ 和 $I \cap [0, +\infty)$ 上应用结论 II 可知 $y(x) \neq 0$ 。

综上所述, 由结论 III 和结论 I 可知原方程具有唯一解, 且此解满足 $y(x) \neq 0$ 。

(2) 当 $\frac{1}{y_0} + x_0^2 < 0$, 即当 $x = 0$ 且 $y < 0$ 、 $x \neq 0$ 且 $-\frac{1}{x^2} < y < 0$ 时, $y(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} ; 当 $\frac{1}{y_0} + x_0^2 \geq 0$, 即当 $y > 0$ 、 $x \neq 0$ 且 $y \leq -\frac{1}{x^2}$ 时, 记 $c_0 = \sqrt{\frac{1}{y_0} + x_0^2}$, $y(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -c_0) \cup (c_0, +\infty)$ 。

(3) 若 $y_0 = 0$, 假设 $\exists \xi \in I$ 使得 $y(\xi) \neq 0$, 由 (1) 可知 $(\xi, y(\xi))$ 确定了唯一解 $y(x)$, 然而此时 $y(x_0) \neq 0$, 矛盾! 故 $y(x) = 0$, 亦是原方程的唯一解。

(4) 由题可得

$$\frac{dy}{y^2} = 2x dx \implies -\frac{1}{y} = x^2 + C \implies y = -\frac{1}{x^2 + C} \quad (11.2.8)$$

为原方程的通解; 此外方程还有特解 $y = 0$, 其并不包含在通解中。 □

另解 解的唯一性可直接利用 Grönwall 不等式证明, 参考例 11.3.12. \square

例 11.2.4 (作业第 3 题, 习题 8.2.3)

讨论以下微分方程初值问题解的存在性与唯一性, 以及解的定义域:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (11.2.9)$$

解 利用分离变量法求解微分方程可得

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx \implies 2\sqrt{y} = x + C \implies y = \left(\frac{x+C}{2}\right)^2 \quad (11.2.10)$$

然而此时方程出现增解, 代入原方程可得

$$\frac{x+C}{2} = \sqrt{\left(\frac{x+C}{2}\right)^2} \implies x \geq -C \quad (11.2.11)$$

此外方程还有特解 $y = 0$, 其并不包含在通解中。

当 $y_0 < 0$ 时, 由于 \sqrt{y} 需满足 $y \geq 0$, 故原方程无解。

当 $y_0 > 0$ 时, 由题可得

$$y_0 = \left(\frac{x_0+C}{2}\right)^2 \implies C = \pm 2\sqrt{y_0} - x_0 \quad (11.2.12)$$

$C = -2\sqrt{y_0} - x_0$ 需要舍去, 因为此时 x_0 不在定义域 $[-C, +\infty)$ 中。当 $x < -C$ 时, 可以选择 y 为特解 $y = 0$, 由此拼接得到的函数仍是原方程的唯一 \mathcal{C}^1 解, 其定义域为 \mathbb{R} , 即

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq x_0 - 2\sqrt{y_0} \\ \left(\frac{x-x_0+2\sqrt{y_0}}{2}\right)^2, & x > x_0 - 2\sqrt{y_0} \end{cases} \quad (11.2.13)$$

当 $y_0 = 0$ 时, 方程有无数个解²; 除了 $y = 0$ 以外, 它们均具有以下形式:

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq \xi \\ \left(\frac{x-\xi}{2}\right)^2, & x > \xi \end{cases} \quad (11.2.14)$$

其中 ξ 是任意不小于 x_0 的实数。 \square

例 11.2.5 (作业第 4 题, 习题 8.2.4)

设 $P(x, y), Q(x, y)$ 都是 k 次齐次函数, 即 $\forall \lambda > 0, \forall (x, y) \neq (0, 0)$, 都有

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k P(x, y), \quad Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k Q(x, y) \quad (11.2.15)$$

²此处鸣谢黄添豪、杨鼎两位同学。

因此在 xy 坐标平面中沿从原点出发的每条射线平移, 微分方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (11.2.16)$$

对应的方向场保持不变。证明: 在平面极坐标系下, 上述微分方程是分离变量的。

证明 作极坐标换元 $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ 可得

$$\begin{cases} dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \end{cases} \implies \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix} \quad (11.2.17)$$

故有

$$\begin{aligned} 0 &= P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \begin{pmatrix} P(x, y) & Q(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(r \cos \theta, r \sin \theta) & Q(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix} \\ &= r^k \underbrace{\begin{pmatrix} P(\cos \theta, \sin \theta) & Q(\cos \theta, \sin \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} M(\theta) & N(\theta) \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix} \\ &= r^k \begin{pmatrix} M(\theta) & N(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix} = r^k (M(\theta) dr + N(\theta) r d\theta) \end{aligned} \quad (11.2.18)$$

故原方程可化为如下变量分离形式

$$\frac{dr}{r} + \frac{N(\theta)}{M(\theta)} d\theta = 0 \quad (11.2.19)$$

□

例 11.2.6 (作业第 5 题, 习题 8.2.7)

已知微分方程:

$$y' = \frac{x^2(y - 2x^3)}{2y + 3x^3} \quad (11.2.20)$$

(1) 证明: 该微分方程在坐标变换 $(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda^3 y)$ 下保持不变。

(2) 利用 (1) 中的结论, 求该微分方程的通解。

解 (1) 作坐标变换 $(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda^3 y)$ 可得

$$\lambda^2 y' = \frac{d(\lambda^3 y)}{d(\lambda x)} = \frac{(\lambda x)^2 (\lambda^3 y - 2(\lambda x)^3)}{2(\lambda^3 y) + 3(\lambda x)^3} = \lambda^2 \frac{x^2(y - 2x^3)}{2y + 3x^3} \quad (11.2.21)$$

故原方程在该坐标变换下保持不变。

(2) 原方程可化为

$$x \left(\frac{y}{x^3} \right)' + 3 \frac{y}{x^3} = \frac{y'}{x^2} = \frac{\frac{y}{x^3} - 2}{2 \frac{y}{x^3} + 3} \quad (11.2.22)$$

作换元 $p = \frac{y}{x^3}$ 可得

$$xp' = \frac{p-2}{2p+3} - 3p = -\frac{2(1+p)(1+3p)}{2p+3} \implies \left(\frac{7}{1+3p} - \frac{1}{1+p} \right) dp + 4 \frac{dx}{x} = 0 \quad (11.2.23)$$

两边积分可得

$$\frac{7}{3} \ln |1+3p| - \ln |1+p| + 4 \ln |x| = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{(1+3p)^7 x^{12}}{(1+p)^3} \right| = \tilde{C} \quad (11.2.24)$$

故原方程的通解为

$$(3y + x^3)^7 = C (y + x^3)^3 \quad (11.2.25)$$

由此得到隐函数形式的通解。 □

例 11.2.7 (作业第 6 题, 习题 8.2.11)

求解以下微分方程:

(1) $2x \sin y dx - \cos y dy = 0$

(4) $(x - y) dx + (x + y) dy = 0$

(2) $(ye^{xy} + \cos x) dx + xe^{xy} dy = 0$

(5) $2xy dx + (y^2 - 3x^2) dy = 0$ (提示: 方程乘 y^{-4}

(3) $[x + (x^2 + y^2)x^3] dx + y dy = 0$

或 $(y^3 - x^2y)^{-1}$ 后再求解)

解 (1) 原方程可化为

$$2x dx - \cot y dy = 0 \implies x^2 - \ln |\sin y| = \tilde{C} \quad (11.2.26)$$

令 $C = \pm e^{-\tilde{C}}$ 可得原方程的通解为

$$y(x) = \arcsin \left(C e^{x^2} \right) \quad (11.2.27)$$

(2) 原方程可化为

$$\cos x dx + e^{xy}(y dx + x dy) = d(\sin x + e^{xy}) = 0 \implies e^{xy} + \sin x = C \quad (11.2.28)$$

故原方程的通解为

$$y = \frac{\ln(C - \sin x)}{x} \quad (11.2.29)$$

(3) 等式两边同乘 $(x^2 + y^2)^{-1}$ 后方程可化为

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + x^3 dx = 0 \implies d \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \frac{x^4}{4} \right] = 0 \implies \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \frac{x^4}{4} = C \quad (11.2.30)$$

(3') 原方程可化为

$$\frac{d(y^2)}{dx} = 2y \frac{dy}{dx} = -2 [x + (x^2 + y^2)x^3] = -2x - 2x^5 - 2x^3y^2 \quad (11.2.31)$$

令 $p = y^2$ 可得

$$\frac{dp}{dx} + 2x^3p = -2x - 2x^5 \implies \left(e^{x^4/2}p\right)' = -2(x+x^5)e^{x^4/2} \quad (11.2.32)$$

其中

$$\int 2(x+x^5)e^{x^4/2} dx \stackrel{t=x^2}{=} \int (1+t^2)e^{t^2/2} dt = te^{t^2/2} + C = x^2e^{x^4/2} + C \quad (11.2.33)$$

故有

$$e^{x^4/2}p = -x^2e^{x^4/2} + C \implies y^2 = -x^2 + Ce^{-x^4/2} \quad (11.2.34)$$

(4) 原方程可化为

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = d \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{y}{x} \right] = 0 \implies \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{y}{x} = C \quad (11.2.35)$$

(5) 等式两边同乘 y^{-4} 后原方程可化为

$$\frac{2x}{y^3} dx - \frac{3x^2}{y^4} dy + \frac{dy}{y^2} = d \left(\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} \right) = 0 \implies \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C \quad (11.2.36)$$

故原方程的通解为

$$x^2 = y^2 + Cy^3 \quad (11.2.37)$$

□

例 11.2.8 (作业第 7 题, 习题 8.2.8)

考虑二阶微分方程

$$\frac{y''}{1+y'^2} + a \frac{xy' - y}{x^2 + y^2} = 0 \quad (11.2.38)$$

- (1) 考虑坐标变换 $(\xi, \eta) = (\lambda x, \lambda y)$, 求 (ξ, η) 坐标系下相应的微分方程。
- (2) 考虑坐标变换 $(x, y) = e^{u(\theta)}(\cos \theta, \sin \theta)$, 求 (u, θ) 坐标系下相应的微分方程。
- (3) 求解原微分方程。

解 (1) 作坐标变换 $(\xi, \eta) = (\lambda x, \lambda y)$ 可得

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda dy}{\lambda dx} = y', \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{dx}{d\xi} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right) = \frac{y''}{\lambda} \quad (11.2.39)$$

方便起见, 我们仍用 η', η'' 表示 $\frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2\eta}{d\xi^2}$, 则原方程可化为

$$\frac{\eta''}{1+\eta'^2} + a \frac{\xi\eta' - \eta}{\xi^2 + \eta^2} = 0 \quad (11.2.40)$$

即原方程在原点位似变换下保持不变。

(2) 注意到原方程可化为

$$d\left(\arctan \frac{1}{y'} - a \arctan \frac{y}{x}\right) = 0 \implies \arctan \frac{1}{y'} - a \arctan \frac{y}{x} = C_1 \quad (11.2.41)$$

计算可得

$$\frac{y}{x} = \tan \theta, \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos \theta + u'(\theta) \sin \theta}{-\sin \theta + u'(\theta) \cos \theta} = \frac{1 + u'(\theta) \tan \theta}{u'(\theta) - \tan \theta} \quad (11.2.42)$$

令 $v(\theta) = \arctan u'(\theta)$, 代入可得

$$\arctan \frac{\tan v(\theta) - \tan \theta}{1 + \tan v(\theta) \tan \theta} - a \arctan \tan \theta = C_1 \implies v(\theta) - (1+a)\theta = C_1 \quad (11.2.43)$$

亦即

$$\arctan u'(\theta) - (1+a)\theta = C_1 \implies \frac{u''}{1+u'^2} = 1+a \quad (11.2.44)$$

(3) 根据上述过程可得: 当 $a \neq -1$ 时, 有

$$u'(\theta) = \tan((1+a)\theta + C_1) \implies u(\theta) = -\frac{1}{1+a} \ln |\cos((1+a)\theta + C_1)| + C_2 \quad (11.2.45)$$

当 $a = -1$ 时, 有

$$v(\theta) = \tilde{C}_1 \implies u'(\theta) = C_1 \implies u(\theta) = C_1\theta + C_2 \quad (11.2.46)$$

由此得到参数方程形式的通解, 转换成隐函数形式可得

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = u(\theta) = \begin{cases} -\frac{1}{1+a} \ln |\cos((1+a) \arctan \frac{y}{x} + C_1)| + C_2, & a \neq -1 \\ C_1 \arctan \frac{y}{x} + C_2, & a = -1 \end{cases} \quad (11.2.47)$$

□

注 本题利用了例 11.2.5 的重要结论: 如果一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (11.2.48)$$

满足 f 是 k 次齐次函数 (本题 $k = 1$, 即在原点位似变换 $(\xi, \eta) = (\lambda x, \lambda y)$ 下保持不变), 那么在极坐标变换后, 该方程是分离变量的; 而指数函数 $\rho(\theta) = e^{u(\theta)}$ 的选择不仅可以保证半径恒正, 还可以将伸缩变换 (ρ 的乘除) 转化成平移变换 (u 的加减)。这为我们解决一些特殊的微分方程提供了一种新的思路。

例 11.2.9 (作业第 8 题, 习题 8.2.6)

求解以下微分方程:

$$(x^2 + y^2 + 3)y' = 2x \left(2y - \frac{x^2}{y}\right) \quad (11.2.49)$$

解 原方程可化为

$$(x^2 + y^2 + 3) \cdot 2y \, dy = 2(2y^2 - x^2) \cdot 2x \, dx \quad (11.2.50)$$

故可令 $(\xi, \eta) = (x^2, y^2)$, 代入原方程可得

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2(2\eta - \xi)}{\xi + \eta + 3} \quad (11.2.51)$$

求解二元一次方程可得

$$\begin{cases} 2\eta - \xi = 0 \\ \xi + \eta + 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \xi = -2 \\ \eta = -1 \end{cases} \quad (11.2.52)$$

故再令 $(z, w) = (\xi + 2, \eta + 1) = (x^2 + 2, y^2 + 1)$, 代入可得

$$\frac{dw}{dz} = \frac{2(2w - z)}{z + w} \quad (11.2.53)$$

接着令 $u = \frac{w}{z}$ 可得

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d(uz)}{dz} = u + z \frac{du}{dz} = \frac{2(2u - 1)}{u + 1} \implies z \frac{du}{dz} = -\frac{(u - 1)(u - 2)}{u + 1} \quad (11.2.54)$$

因此

$$\frac{(u + 1) du}{(u - 1)(u - 2)} + \frac{dz}{z} = \frac{3 du}{u - 2} - \frac{2 du}{u - 1} + \frac{dz}{z} = 0 \quad (11.2.55)$$

解得

$$(u - 2)^3 z = C(u - 1)^2 \implies (w - 2z)^3 = C(w - z)^2 \implies (y^2 - 2x^2 - 3)^3 = C(y^2 - x^2 - 1)^2 \quad (11.2.56)$$

□

例 11.2.10 (作业第 9 题, 习题 8.3.1)

求解以下微分方程:

(1) $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$

(5) $x(x + 1)y'' - (4x + 2)y' + 6y = 0$

(2) $y'' + \frac{2y'^2}{1-y} = 0$

(6) $x^2y'' - (x - 1)^2y' + y = 0$

(3) $yy'' - y'^2 = 0$

(4) $y'' - y'^3 = 0$

(7) $y'' - y'^2 = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

解 (1) 以 $p = y'$ 为因变量可实现降维, 同时方程可分离变量, 故有

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1 + x^2} dx \implies \ln |p| = \ln(1 + x^2) + C \implies y' = p = C_1(1 + x^2) \quad (11.2.57)$$

积分可得

$$y = C_1 \left(x + \frac{x^3}{3} \right) + C_2 \quad (11.2.58)$$

(2) 方程不显含 x , 故可令 $p = y'$, 则 $y'' = \frac{p dp}{dy}$, 代入原方程可得

$$\frac{p dp}{dy} + \frac{2p^2}{1-y} = 0 \implies \frac{dp}{p} = \frac{2 dy}{y-1} \implies \frac{dy}{dx} = p = C_1(1-y)^2 \quad (11.2.59)$$

再次变量分离可得

$$\frac{dy}{(1-y)^2} = C_1 dx \implies \frac{1}{1-y} = C_1 x + C_2 \implies y = 1 - \frac{1}{C_1 x + C_2} \quad (11.2.60)$$

(3) 同 (2) 可得

$$y \frac{p dp}{dy} - p^2 = 0 \implies \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \implies \frac{dy}{dx} = p = C_1 y \quad (11.2.61)$$

再次变量分离可得

$$\frac{dy}{y} = C_1 dx \implies y = C_2 e^{C_1 x} \quad (11.2.62)$$

(4) 同 (1) 可得

$$\frac{dp}{p^3} = dx \implies -\frac{1}{2p^2} = x + C \implies y' = p = \pm \frac{1}{\sqrt{C_1 - 2x}} \quad (11.2.63)$$

积分可得

$$y = \pm \sqrt{C_1 - 2x} + C_2 \quad (11.2.64)$$

(5) 注意到

$$x(x+1)y'' - (4x+2)y' + 6y = \left((x+1) \frac{d}{dx} - 2 \right) \left(x \frac{d}{dx} - 3 \right) y \quad (11.2.65)$$

因此可分两步解方程: 令 $z = xy' - 3$, 则

$$(x+1)z' - 2z = 0 \implies \frac{dz}{z} = \frac{2 dx}{x+1} \implies z = \tilde{C}_1 (x+1)^2 \quad (11.2.66)$$

再解方程

$$xy' - 3y = \tilde{C}_1 (x+1)^2 \implies \left(\frac{y}{x^3} \right)' = \tilde{C}_1 \frac{(x+1)^2}{x^4} \implies y = C_2 x^3 + C_1 (3x^2 + 3x + 1) \quad (11.2.67)$$

(5') 注意到

$$\left(\frac{y}{x^k} \right)' = \frac{xy' - ky}{x^{k+1}}, \quad \left(\frac{y'}{x^k} \right)' = \frac{xy'' - ky'}{x^{k+1}} \quad (11.2.68)$$

为了凑出二阶和零阶项系数, 尝试

$$\begin{aligned} \left(\frac{y'}{x^k} + \frac{y'}{x^{k-1}} - \frac{6}{k} \frac{y}{x^k} \right)' &= \frac{xy'' - ky'}{x^{k+1}} + \frac{xy'' - (k-1)y'}{x^k} - \frac{6}{k} \frac{xy' - ky}{x^{k+1}} \\ &= \frac{x(x+1)y'' - \left[(k-1 + \frac{6}{k})x + k \right] y' + 6y}{x^{k+1}} \end{aligned} \quad (11.2.69)$$

故有

$$\left(k - 1 + \frac{6}{k} \right) x + k = 4x + 2 \implies k = 2 \quad (11.2.70)$$

因此

$$\left[\frac{(1+x)y' - 3y}{x^2} \right]' = \frac{x(x+1)y'' - (4x+2)y' + 6y}{x^3} = 0 \implies \frac{(1+x)y' - 3y}{x^2} = C_1 \quad (11.2.71)$$

利用积分因子法可得

$$\frac{C_1 x^2}{(1+x)^4} = \frac{(1+x)y' - 3y}{(1+x)^4} = \left[\frac{y}{(1+x)^3} \right]' \quad (11.2.72)$$

积分可得

$$\begin{aligned} y &= C_2(1+x)^3 + C_1(1+x)^3 \int \left[\frac{(1+x)^2 - 2(1+x) + 1}{(1+x)^4} d(1+x) \right] \\ &= C_2(1+x)^3 + C_1(1+x)^3 \left[-\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{3(1+x)^3} \right] \\ &= C_2(1+x)^3 - \frac{1}{3}C_1(3x^2 + 3x + 1) \end{aligned} \quad (11.2.73)$$

重新选择 C_1, C_2 可使得

$$y = C_2 x^3 + C_1(3x^2 + 3x + 1) \quad (11.2.74)$$

(5") 由于方程是线性的, 且 $y^{(k)}$ 的系数 $a_k(x)$ 均为次数为 k 的多项式, 故我们可以猜测方程具有多项式解:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (11.2.75)$$

代入原方程可得

$$(6a_0 - 2a_1) + (2a_1 - 2a_2)x = 0 \implies a_2 = a_1 = 3a_0, \quad a_3 \in \mathbb{R} \quad (11.2.76)$$

因此

$$y = C_2 x^3 + C_1(3x^2 + 3x + 1) \quad (11.2.77)$$

(6) 注意到

$$x^2 y'' + (2x-1)y' + x^2 y' + y = (x^2 y' - y)' - (x^2 y' - y) = 0 \iff \left(\frac{d}{dx} - 1 \right) \left(x^2 \frac{d}{dx} - 1 \right) y = 0 \quad (11.2.78)$$

由此解得

$$x^2 y' - y = C_1 e^x \quad (11.2.79)$$

再利用常数变易法可得

$$y = C_2 e^{-1/x} + C_1 e^{-1/x} \int_1^x \frac{e^{t+1/t}}{t^2} dt \quad (11.2.80)$$

(7) 同(4)可得

$$\frac{dp}{p^2} = dx \implies -\frac{1}{p} = x + C \implies y' = p = -\frac{1}{x + C_1} \quad (11.2.81)$$

积分可得

$$y = -\ln|x + C_1| + C_2 \quad (11.2.82)$$

代入初值条件可得 $C_1 = -1, C_2 = 0$, 故原方程的解为

$$y = -\ln(1-x) \quad (11.2.83)$$

□

11.3 补充习题

11.3.1 一阶微分方程

例 11.3.1

画出以下微分方程的斜率场的大致图像，并根据斜率场的特点说明方程的解的特征：

$$(1) y' = x(1-x) \quad (2) y' = \frac{y}{1+y^2} \quad (3) y' = \frac{x-y}{x+y} \quad (4) y' = \sin(x^2 + y^2)$$

解 利用 Mathematica 绘制的斜率场如图 11.3.1 所示。斜率场的特征为：

- (1) $y' = f(x, y) = g(x)$ 的斜率场只与 x 有关，故将某条积分曲线沿 y 轴平移后，其仍为积分曲线。
- (2) $y' = f(x, y) = g(y)$ 的斜率场只与 y 有关，故将某条积分曲线沿 x 轴平移后，其仍为积分曲线。
- (3) 对于 $y' = f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ 的斜率场，注意到 $f(ax, ay) = f(x, y)$ ，故将某条积分曲线沿原点作伸缩变换后，其仍为积分曲线。
- (4) 对于 $y' = f(x, y) = g(x^2 + y^2)$ 的斜率场，其在以原点为中心的同心圆上保持不变，故将某条积分曲线绕原点旋转后，其仍为积分曲线。

□

例 11.3.2

求以下微分方程的通解：

$$(1) y' = x(1-x) \quad (2) y' = \frac{y}{1+y^2} \quad (3) y' = \frac{x-y}{x+y} \quad (4) y' = (x+y+3)^2$$

解

- (1) $y' = x(1-x)$ ，分离变量得

$$\frac{dy}{dx} = x - x^2 \implies y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C \quad (11.3.1)$$

- (2) $y' = \frac{y}{1+y^2}$ ，分离变量得

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1+y^2}{y} \implies x = \frac{y^2}{2} + \ln|y| + C \quad (11.3.2)$$

此即方程的通解。当 $y > 0$ (或 $y < 0$) 时 $x'_y > 0$ (或 $x'_y < 0$)，所以 $x = x(y)$ 有可微的反函数 $y = y(x)$ 。此外，方程还有特解 $y = 0$ 。

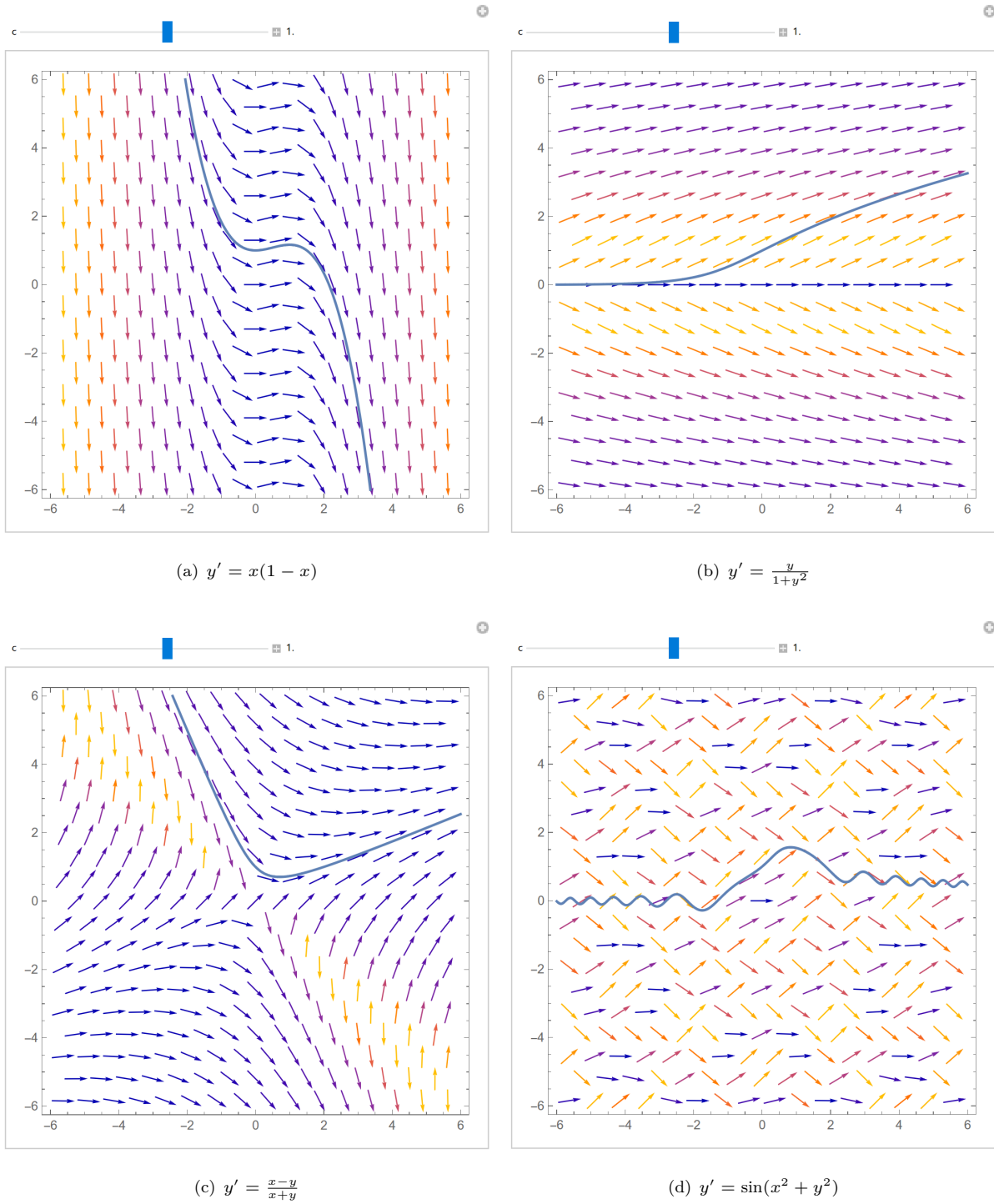


图 11.3.1: 绘制的斜率场

(3) $y' = \frac{x-y}{x+y}$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 则

$$x \frac{du}{dx} = \frac{1-u}{1+u} - u = \frac{1-2u-u^2}{1+u} \quad (11.3.3)$$

因此

$$d \ln |x| = \frac{dx}{x} = \frac{(1+u) du}{1-2u-u^2} = -\frac{1}{2} d \ln |u^2 + 2u - 1| \quad (11.3.4)$$

两边积分可得

$$\ln |u^2 + 2u - 1| + 2 \ln |x| = C \implies y^2 + 2xy - x^2 = C \quad (11.3.5)$$

(4) $y' = (x+y+3)^2$, 令 $u = x+y+3$, 则

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} + 1 = 1 + u^2 \implies \frac{du}{1+u^2} = dx \quad (11.3.6)$$

两边积分可得

$$\arctan u = x + C \implies \arctan(x+y+3) = x + C \quad (11.3.7)$$

□

注

- (1) 一阶微分方程 $F(x, y, y') = 0$ 的解允许是由代数方程 $G(x, y) = C$ 表示的曲线, 函数 G 叫做微分方程的首次积分, 物理上它是一个守恒量。
- (2) 微分方程具有的对称性 (变换下的不变性) 意味着它存在某种形式的首次积分, 即某种守恒量。
- (3) 可以利用微分方程的对称性得到求解微分方程的方法。

例 11.3.3

求下列方程的解:

(1) $y' = \frac{x(y-1)}{y+xy}$

(4) $(1-x) dy = (1+y) dx$

(2) $y' = \sqrt{xy}$

(5) $3x dy - y(2 - x \cos x) dx = 0$

(3) $(1 + e^x)yy' = e^x, \quad y(1) = 1$

(6) $(e^{x+y} - e^x) dx + (e^{x+y} + e^y) dy = 0$

解 这些方程都是可分离变量的方程, 故此处仅列出答案。

(1) $(y-1)(x+1)e^{y-x} = C$

(4) $(1+y)(1-x) = C$

(2) $y = \left(\frac{1}{3}x^{3/2} + C\right)^2$

(5) $y = Cx^{2/3}e^{-\sin x}$

(3) $y = \sqrt{2 \ln(1 + e^x) + 1} - 2 \ln(1 + e)$

(6) $(e^x + 1)(e^y - 1) = C$

□

例 11.3.4

平面直角坐标系中，与 y 轴平行的光线经曲线 $y = y(x)$ 反射后汇聚于原点。求曲线的方程。

解 曲线的切向量为 $\mathbf{t} = (1, y')$ ，法向量为 $\mathbf{n} = (-y', 1)$ 。假设光沿 y 轴负方向入射，则入射光的单位方向向量为 $\mathbf{a} = (0, -1)$ ，反射光的单位方向向量为

$$\mathbf{b} = \frac{(-x, -y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (11.3.8)$$

由反射定律可得

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \implies 1 = \frac{xy' - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \implies y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad (11.3.9)$$

令 $u = \frac{y}{x}$ ，则

$$x \frac{du}{dx} = u + \sqrt{1 + u^2} - u \implies \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x} \quad (11.3.10)$$

两边积分可得

$$\ln |u + \sqrt{1 + u^2}| = \ln |x| + C \implies u + \sqrt{1 + u^2} = Cx \quad (11.3.11)$$

解得

$$u = \frac{(Cx)^2 - 1}{2Cx} \implies y = \frac{C}{2}x^2 - \frac{1}{2C} \quad (11.3.12)$$

即为抛物线。

□

例 11.3.5

求曲线族 $xy = C$ 的正交曲线族。

解 该曲线族满足的微分方程为

$$y dx + x dy = 0 \quad (11.3.13)$$

由此可得该曲线族的正交向量场为 (y, x) ，它应当为正交曲线族的切向量场，因此

$$x dx - y dy = 0 \implies x^2 - y^2 = C \quad (11.3.14)$$

□

11.3.2 一阶线性方程

例 11.3.6

记 $\mathcal{P}_{\alpha,n}$ 是所有形如 $e^{\alpha x}P(x)$ 的拟多项式组成的线性空间, 其中 P 是次数不超过 n 的多项式。证明:

(1) 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 若 $\alpha \neq \lambda$, 则 $\forall f \in \mathcal{P}_{\alpha,n}$, $y' - \lambda y = f$ 在 $\mathcal{P}_{\alpha,n}$ 中有唯一解。

(2) $\forall f \in \mathcal{P}_{\lambda,n}$, $y' - \lambda y = f$ 在 $\mathcal{P}_{\lambda,n+1}$ 中有无穷多解, 这些解彼此相差 $e^{\lambda x}$ 的一个常数倍数。

证明 (1) 记 $\mathcal{L} = \frac{d}{dx} - \lambda$, 则

$$\mathcal{L}\left(e^{\alpha x} \frac{x^k}{k!}\right) = e^{\alpha x} \left[(\alpha - \lambda) \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \right] \quad (11.3.15)$$

因此 \mathcal{L} 是 $\mathcal{P}_{\alpha,n}$ 到自身的线性变换, 在基

$$\left\{ e^{\alpha x}, e^{\alpha x}x, \dots, e^{\alpha x} \frac{x^n}{n!} \right\} \quad (11.3.16)$$

下的表示矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & 1 & & & \\ & \alpha - \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha - \lambda & 1 \\ & & & & \alpha - \lambda \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \quad (11.3.17)$$

当 $\alpha \neq \lambda$ 时, A 可逆, 从而 \mathcal{L} 是 $\mathcal{P}_{\alpha,n}$ 到自身的可逆线性变换。

(2) $\mathcal{L}: \mathcal{P}_{\lambda,n+1} \rightarrow \mathcal{P}_{\lambda,n}$ 的矩阵表示为 $(0, I_{n+1})_{(n+1) \times (n+2)}$, 所以 \mathcal{L} 是满射、但不是单射, 所以 $\forall f \in \mathcal{P}_{\lambda,n}$, $y' - \lambda y = f$ 在 $\mathcal{P}_{\lambda,n+1}$ 中有无穷多解, 这些解彼此相差 $c \cdot e^{\lambda x}$ 。□

例 11.3.7

求下列方程的解:

(1) $y' - 2y = e^x x^2$

(2) $y' + y = \sin x$

(3) $y' - y = xe^x$

解 (1) 齐次方程的通解为 $y = Ce^{2x}$ 。设

$$y = c \cdot \left(e^x, e^x x, e^x \frac{x^2}{2} \right) \quad (11.3.18)$$

由此可得

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \implies y(x) = -e^x(2 + 2x + x^2) \quad (11.3.19)$$

由此得到非齐次方程的特解。因此非齐次方程的通解为

$$y = Ce^{2x} - e^x(2 + 2x + x^2) \quad (11.3.20)$$

(2) 齐次方程的通解为 $y = Ce^{-x}$ 。注意到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sin x) &= \cos x + \sin x \\ \mathcal{L}(\cos x) &= -\sin x + \cos x \end{aligned} \quad (11.3.21)$$

因此

$$\sin x = \mathcal{L}\left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right) \implies y = \frac{\sin x - \cos x}{2} \quad (11.3.22)$$

由此得到非齐次方程的特解。因此非齐次方程的通解为

$$y = Ce^{-x} + \frac{\sin x - \cos x}{2} \quad (11.3.23)$$

(3) 齐次方程的通解为 $y = Ce^x$ 。注意到

$$\mathcal{L}\left(e^x \frac{x^2}{2}\right) = e^x x \quad (11.3.24)$$

由此得到非齐次方程的特解。因此非齐次方程的通解为

$$y = Ce^x + e^x \frac{x^2}{2} \quad (11.3.25)$$

□

例 11.3.8

求下列方程的解:

$$(1) y' + 2xy = 2x^3y^2$$

$$(2) y' = ay^2 + \frac{b}{x^2}, \quad 4ab > 1$$

解 (1) 这是 Bernoulli 方程。令 $z = y^{1-2} = y^{-1}$, 则

$$z' = -y^{-2}y' = -y^{-2}(2x^3y^2 - 2xy) = -2x^3 + 2xz \quad (11.3.26)$$

解得

$$z = Ce^{x^2} + x^2 + 1 \implies y = \frac{1}{Ce^{x^2} + x^2 + 1} \quad (11.3.27)$$

此外, $y = 0$ 也是方程的解。

(2) 这是 Riccati 方程的特例。令 $z = \frac{1}{y}$, 则

$$z' = -y^{-2}y' = -y^{-2}\left(ay^2 + \frac{b}{x^2}\right) = -a - b\left(\frac{z}{x}\right)^2 \quad (11.3.28)$$

设 $\Delta = 4ab - 1$, 由此解得

$$z = \frac{-1 + \sqrt{\Delta} \tan \frac{\sqrt{\Delta}(C_1 - \ln x)}{2}}{2b} x = \frac{1}{y} \quad (11.3.29)$$

□

11.3.3 有关一阶微分方程的证明题

例 11.3.9 (2023 秋期末考试 · 17)

设 $f \in \mathcal{C}[0, 1]$, 且满足

$$|f(x)| \leq 1 + \int_0^x |f(t)| dt \quad (11.3.30)$$

证明: $|f(x)| \leq e^x, \forall x \in [0, 1]$ 。

证明 令 $u(x) := e^{-x} \int_0^x |f(t)| dt$, 则

$$u'(x) = e^{-x} \left[|f(x)| - \int_0^x |f(t)| dt \right] \leq e^{-x} \quad (11.3.31)$$

故 $\forall x \in [0, 1]$, 都有

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t) dt \leq \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x} \quad (11.3.32)$$

因此

$$|f(x)| \leq 1 + \int_0^x |f(t)| dt = 1 + e^x u(x) \leq e^x \quad (11.3.33)$$

□

另证 令 $g(x) := \int_0^x |f(t)| dt$, 则 $g(0) = 0$ 且

$$g'(x) = |f(x)| \leq 1 + g(x) \implies \frac{g'(x)}{1 + g(x)} \leq 1 \quad (11.3.34)$$

两边从 0 到 x 积分可得

$$\ln[1 + g(x)] \leq x \implies g(x) \leq e^x - 1 \quad (11.3.35)$$

因此

$$|f(x)| \leq 1 + g(x) \leq e^x \quad (11.3.36)$$

□

例 11.3.10 (Grönwall 不等式的积分形式)

设 $x_0 \in [a, b]$, $f, g, h \in \mathcal{C}[a, b]$ 满足 g 非负, h 在 $[a, x_0]$ 单调不增、在 $[x_0, b]$ 单调不减, 且

$$f(x) \leq \int_{x_0}^x f(t)g(t) |dt| + h(x) \quad (11.3.37)$$

证明:

$$f(x) \leq e^{\int_{x_0}^x g(t)|dt|} h(x), \quad \forall x \in [a, b] \quad (11.3.38)$$

其中

$$\int_{x_0}^x \varphi(t) |dt| = \begin{cases} \int_{x_0}^x \varphi(t) dt, & x \geq x_0 \\ \int_x^{x_0} \varphi(t) dt, & x \leq x_0 \end{cases} \quad (11.3.39)$$

证明 为了突出强调 $x \geq x_0$ 和 $x \leq x_0$ 两种情况下符号和不等式方向的变化, 这里将两部分证明合写在一起。方便起见, 证明过程中的双重不等号均为不严格不等号, 即 \geq 表示一一对应的 \geq 或 \leq , 例如:

$$f \leq g \pm h \implies \begin{cases} (1) f \leq g + h \\ (2) f \geq g - h \end{cases} \quad (11.3.40)$$

如果读者阅读此证明较为困难, 可以将其手动分为两部分阅读。

先考虑一个简单的情形: h 可微。设 $x \geq x_0$, 记 $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)g(t) |dt| + h(x)$, 则

$$F'(x) = \underbrace{\pm g(x)}_{\geq 0} \underbrace{f(x)}_{\leq F(x)} + h'(x) \leq \pm g(x)F(x) + h'(x) \implies F'(x) \mp g(x)F(x) \leq h'(x) \quad (11.3.41)$$

其中 $h'(x) \geq 0$ 。利用积分因子 $e^{-\int_{x_0}^x g(t)|dt|}$ 可得

$$\left[F(x)e^{-\int_{x_0}^x g(t)|dt|} \right]' = \underbrace{e^{-\int_{x_0}^x g(t)|dt|}}_{>0} \underbrace{[F'(x) \mp F(x)g(x)]}_{\leq h'(x)} \leq \underbrace{e^{-\int_{x_0}^x g(t)|dt|}}_{\leq 1} \underbrace{h'(x)}_{\geq 0} \leq h'(x) \quad (11.3.42)$$

故有

$$F(x)e^{-\int_{x_0}^x g(t)|dt|} = F(x_0) + \int_{x_0}^x \underbrace{[F(\xi)e^{-\int_{x_0}^{\xi} g(t)|dt|}]'}_{\leq h'(\xi)} \underbrace{d\xi}_{\geq 0} \leq h(x_0) + \int_{x_0}^x h'(\xi) d\xi = h(x) \quad (11.3.43)$$

综上所述, 我们有

$$f(x) \leq F(x) \leq e^{\int_{x_0}^x g(t)|dt|} h(x) \quad (11.3.44)$$

对于一般的 h 和 x , 我们需要修改以上证明。从下式出发 (红色表示待转化的式子, 即需要 h' 可微的式

子), 利用分部积分法可得:

$$\begin{aligned}
 \left[F(x)e^{-\int_{x_0}^x g(t)|dt|} \right]' d\xi &\stackrel{?}{\leq} e^{-\int_{x_0}^x g(t)|dt|} h'(x) d\xi \\
 F(x)e^{-\int_{x_0}^x g(t)|dt|} &\stackrel{?}{\leq} F(x_0) + \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^\xi g(t)|dt|} h'(\xi) d\xi \\
 &= h(x_0) + e^{-\int_{x_0}^x g(t)|dt|} h(\xi) \Big|_{\xi=x_0}^x - \int_{x_0}^x h(\xi) \left[e^{-\int_{x_0}^\xi g(t)|dt|} \right]' d\xi \\
 &= e^{-\int_{x_0}^x g(t)|dt|} h(x) \pm \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^\xi g(t)|dt|} g(\xi) h(\xi) d\xi \\
 &= e^{-\int_{x_0}^x g(t)|dt|} h(x) + \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^\xi g(t)|dt|} g(\xi) h(\xi) |d\xi|
 \end{aligned} \tag{11.3.45}$$

这等价于证明

$$e^{-\int_{x_0}^x g(t)|dt|} \int_{x_0}^x f(t)g(t) |dt| \stackrel{?}{\leq} \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^\xi g(t)|dt|} g(\xi)h(\xi) |d\xi| \tag{11.3.46}$$

此时不等式左侧可微, 故可利用

$$\begin{aligned}
 e^{-\int_{x_0}^x g(t)|dt|} \int_{x_0}^x f(t)g(t) |dt| &= \int_{x_0}^x \left[e^{-\int_{x_0}^\xi g(t)|dt|} \int_{x_0}^\xi f(t)g(t) |dt| \right]' d\xi \\
 &= \pm \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^\xi g(t)|dt|} g(\xi) \left[f(\xi) - \int_{x_0}^\xi f(t)g(t) |dt| \right] d\xi \\
 &= \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^\xi g(t)|dt|} g(\xi) \left[f(\xi) - \int_{x_0}^\xi f(t)g(t) |dt| \right] |d\xi| \\
 &\leq \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^\xi g(t)|dt|} g(\xi)h(\xi) |d\xi|
 \end{aligned} \tag{11.3.47}$$

因此

$$\begin{aligned}
 F(x)e^{-\int_{x_0}^x g(t)|dt|} &\leq e^{-\int_{x_0}^x g(t)|dt|} h(x) + \int_{x_0}^x \underbrace{e^{-\int_{x_0}^\xi g(t)|dt|} g(\xi)}_{\geq 0} \underbrace{h(\xi)}_{\leq h(x)} |d\xi| \\
 &\leq e^{-\int_{x_0}^x g(t)|dt|} h(x) + h(x) \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^\xi g(t)|dt|} g(\xi) |d\xi| \\
 &= h(x) \left[e^{-\int_{x_0}^x g(t)|dt|} - e^{-\int_{x_0}^\xi g(t)|dt|} \Big|_{\xi=x_0}^x \right] = h(x)
 \end{aligned} \tag{11.3.48}$$

亦即

$$f(x) \leq F(x) \leq e^{\int_{x_0}^x g(t) dt} h(x) \tag{11.3.49}$$

□

注 由于我们拓展了定积分的定义, 即不要求积分下限小于积分上限, 故在证明时需要特别注意下式仅在 $b \geq a$ 时成立:

$$f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx, \quad b \geq a \tag{11.3.50}$$

或者可以一般地写成

$$f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x) |dx| \leq \int_a^b g(x) |dx|, \quad \forall a, b \quad (11.3.51)$$

三角（绝对值）不等式也可以一般地写成

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| |dx| \quad (11.3.52)$$

例 11.3.11 (Grönwall 不等式的微分形式)

设 φ, ψ 是非负连续函数, η 是可微函数, η' 是 Riemann 可积函数, 且

$$\eta'(t) \leq \varphi(t)\eta(t) + \psi(t), \quad \forall t \geq t_0 \quad (11.3.53)$$

证明:

$$\eta(t) \leq e^{\int_{t_0}^t \varphi(s) ds} \left[\eta(t_0) + \int_{t_0}^t \psi(s) ds \right], \quad \forall t \geq t_0 \quad (11.3.54)$$

证明 考虑函数

$$F(t) := e^{-\int_{t_0}^t \varphi(s) ds} \eta(t) \quad (11.3.55)$$

则

$$F'(t) = e^{-\int_{t_0}^t \varphi(s) ds} [\eta'(t) - \varphi(t)\eta(t)] \leq e^{-\int_{t_0}^t \varphi(s) ds} \psi(t) \quad (11.3.56)$$

所以

$$F(t) = F(t_0) + \int_{t_0}^t F'(s) ds \leq \eta(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s \varphi(u) du} \psi(s) ds \leq \eta(t_0) + \int_{t_0}^t \psi(s) ds \quad (11.3.57)$$

因此

$$\eta(t) = e^{\int_{t_0}^t \varphi(s) ds} F(t) \leq e^{\int_{t_0}^t \varphi(s) ds} \left[\eta(t_0) + \int_{t_0}^t \psi(s) ds \right] \quad (11.3.58)$$

□

注 Grönwall 不等式的微分形式是积分形式的推论, 积分形式放宽了对函数的可微性要求。

例 11.3.12

设 $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, 区间 $I \ni x_0$, 利用 Grönwall 不等式证明: 以下初值问题的解在 I 上唯一存在。

$$\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (11.3.59)$$

证明 设 y_1, y_2 都是该初值问题的解, 则

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x y_1'(s) ds = y_0 + \int_{x_0}^x 2s(y_1(s))^2 ds \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x y_2'(s) ds = y_0 + \int_{x_0}^x 2s(y_2(s))^2 ds \end{aligned} \quad (11.3.60)$$

令 $y = y_1 - y_2$, 则有 $y(x_0) = 0$, 且

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x) = \int_{x_0}^x 2s(y_1(s) + y_2(s))y(s) ds \quad (11.3.61)$$

由绝对值不等式可得

$$|y(x)| \leq \int_{x_0}^x |2s(y_1(s) + y_2(s))| \cdot |y(s)| \cdot |ds| \quad (11.3.62)$$

对 $|y(x)|$ 使用 Grönwall 不等式可得 $|y(x)| \leq 0$, 因此 $y = 0$, 即 $y_1 = y_2$. 故解唯一存在。□

注 本题可扩展至: 设 $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, 区间 $I \ni x_0$, 若初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (11.3.63)$$

满足 f 关于 y Lipschitz 连续, 即存在 $M > 0$ 使得 $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, 有 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$, 则解唯一存在。证明方法同上。

例 11.3.13

证明一阶线性方程

$$xy' - (2x^2 + 1)y = x^2, \quad x > 0 \quad (11.3.64)$$

有且仅有一个解 $y^*(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 存在有限极限。写出 $y^*(x)$ 的表达式, 并求这个极限。

解 原方程的通解为

$$y(x) = xe^{x^2} \left[C_0 + \int_1^x e^{-t^2} dt \right] \quad (11.3.65)$$

注意到 $\int_1^x e^{-t^2} dt$ 收敛, 而 $xe^{x^2} \rightarrow +\infty$, 所以 y 有界仅当

$$C_0 = - \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad (11.3.66)$$

因此

$$y^*(x) = xe^{x^2} \left[\int_1^x e^{-t^2} dt - \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt \right] = -xe^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad (11.3.67)$$

此时

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y^*(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{- \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt}{\frac{1}{x}e^{-x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{\left(-\frac{1}{x^2} - 2\right)e^{-x^2}} = -\frac{1}{2} \quad (11.3.68)$$

□

例 11.3.14 (2020 秋期末考试 · 17)

设 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ 且为有界函数。

(1) 证明: 常微分方程 $y' + y = f(x)$ 的每个解 $y = y(x)$ 都是 $[0, +\infty)$ 上的有界函数。

(2) 当 $x \leq 0$ 时, 常微分方程 $y' + y = f(x)$ 是否存在有界解? 若存在, 有几个?

解 (1) 常微分方程的通解为

$$y(x) = e^{-x} \left[\int_0^x f(t)e^t dt + y(0) \right] \quad (11.3.69)$$

当 $x \geq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq |y(0)|e^{-x} + e^{-x} \left| \int_0^x f(t)e^t dt \right| \leq |y(0)| + e^{-x} \int_0^x |f(t)|e^t dt \\ &\leq |y(0)| + Me^{-x} \int_0^x e^t dt \leq |y(0)| + Me^{-x} \cdot e^x = M_1 \end{aligned} \quad (11.3.70)$$

(2) 当 $x \leq 0$ 时, $e^{-x} \rightarrow +\infty$, 故常微分方程存在有界解仅当

$$y(0) = \int_{-\infty}^0 f(x)e^x dx \quad (11.3.71)$$

此时

$$y(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x f(t)e^t dt \quad (11.3.72)$$

验证可得

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq e^{-x} \left| \int_{-\infty}^x f(t)e^t dt \right| \leq e^{-x} \int_{-\infty}^x |f(t)|e^t dt \\ &\leq Me^{-x} \int_{-\infty}^x e^t dt \leq Me^{-x} \cdot e^x = M_2 \end{aligned} \quad (11.3.73)$$

因此常微分方程存在有界解当且仅当 $y(0) = \int_{-\infty}^0 f(x)e^x dx$, 此时有界解的个数为 1。 \square

例 11.3.15 (2023 秋期末考试 · 16)

考虑一阶线性常微分方程

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x) \quad (11.3.74)$$

其中 $a, b \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, 且

- $\exists c > 0$ 使得 $a(x) \geq c, \forall x \geq 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = 0$ 。

证明: 该方程的每个解 $y = y(x)$ 均满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ 。

证明 利用常数变易法或积分因子 $e^{\int_0^x a(s) ds}$ 可将方程的解 y 表示为

$$y(x) = e^{-\int_0^x a(s) ds} \left[y(0) + \int_0^x b(t) e^{\int_0^t a(s) ds} dt \right] = \frac{y_0 + \int_0^x b(t) e^{\int_0^t a(s) ds} dt}{e^{\int_0^x a(s) ds}} \quad (11.3.75)$$

由题设 $a(x) \geq c > 0$ 知分母 $e^{\int_0^x a(s) ds}$ 在 $(0, +\infty)$ 严格增且

$$e^{\int_0^x a(s) ds} \geq e^{cx} \rightarrow +\infty \quad (11.3.76)$$

由 L'Hôpital 法则可得

$$\frac{\left(y_0 + \int_0^x b(t) e^{\int_0^t a(s) ds} dt \right)'}{\left(e^{\int_0^x a(s) ds} \right)'} = \frac{b(x) e^{\int_0^x a(s) ds}}{a(x) e^{\int_0^x a(s) ds}} = \frac{b(x)}{a(x)} \quad (11.3.77)$$

由夹挤定理知

$$0 \leq \left| \frac{b(x)}{a(x)} \right| \leq \frac{|b(x)|}{c} \rightarrow 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b(x)}{a(x)} = 0 \quad (11.3.78)$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y_0 + \int_0^x b(t) e^{\int_0^t a(s) ds} dt}{e^{\int_0^x a(s) ds}} = 0 \quad (11.3.79)$$

□

另证 令 $A(x) := \int_0^x a(s) ds$, 同理可知 $e^{A(x)}$ 严格增且趋于 $+\infty$, 由 L'Hôpital 法则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{A(x)} y(x)}{e^{A(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{A(x)} [y'(x) + a(x)y(x)]}{e^{A(x)} a(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b(x)}{a(x)} = 0 \quad (11.3.80)$$

□

例 11.3.16

设函数 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ 且恒非负, 又存在常数 A 和 $a(a > 0)$ 使得

$$f(x) + a \int_{x-1}^x f(t) dt = A \quad (11.3.81)$$

证明:

- (1) $F(x) := e^{ax} f(x)$ 单调增;
- (2) 若 $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$, 则 $f \equiv 0$.

证明 (1) 易证 $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, 且有

$$f'(x) + af(x) = af(x-1) \quad (11.3.82)$$

所以

$$F'(x) = e^{ax} [f'(x) + af(x)] = e^{ax} af(x-1) \geq 0 \quad (11.3.83)$$

因此 F 单调增。

(2) 由于 F 单调增且非负, 注意到

$$\begin{aligned} f(x) &= A - a \int_{x-1}^x f(t) dt \\ F(x) &= Ae^{ax} - a \int_{x-1}^x e^{ax} f(t) dt \geq Ae^{ax} - a \int_{x-1}^x e^{a(t+1)} f(t) dt \\ &= Ae^{ax} - ae^a \int_{x-1}^x F(t) dt \geq Ae^{ax} - ae^a F(x) \end{aligned} \quad (11.3.84)$$

所以

$$f(x) \geq A - ae^a f(x) \implies A \leq (1 + ae^a) \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0 \quad (11.3.85)$$

因此

$$0 \geq A = f(x) + a \int_{x-1}^x f(t) dt \geq f(x) \geq 0 \implies f \equiv 0 \quad (11.3.86)$$

□

例 11.3.17

设 f 是连续的周期函数, 周期为 $T > 0$, 对方程

$$y' - \lambda y = f(x) \quad (11.3.87)$$

讨论: (1) 有界解的个数; (2) 以 T 为周期的解的个数。

解 (1) 方程的解为

$$y(x) = e^{\lambda x} \left[y(x_0) e^{-\lambda x_0} + \int_{x_0}^x e^{-\lambda t} f(t) dt \right] \quad (11.3.88)$$

因此

$$\begin{aligned} y(x_0 + T) &= e^{\lambda(x_0 + T)} \left[y(x_0) e^{-\lambda x_0} + \int_{x_0}^{x_0 + T} e^{-\lambda t} f(t) dt \right] \\ &= e^{\lambda T} y(x_0) + \int_0^T e^{-\lambda s} f(x_0 + s) ds \end{aligned} \quad (11.3.89)$$

取 $a_n = y(nT)$, 则有递推关系式

$$a_{n+1} = e^{\lambda T} a_n + \int_0^T e^{-\lambda s} f(s) ds \quad (11.3.90)$$

当 $\lambda = 0$ 时, $\{a_n\}$ 有界当且仅当 $\int_0^T f(s) ds = 0$, 这与 $y(0)$ 无关; 因此要么没有有界解, 要么有无穷多个有界解。

当 $\lambda \neq 0$ 时, 令 β 满足

$$a_{n+1} + \beta = e^{\lambda T} (a_n + \beta) \implies \beta = \frac{1}{1 - e^{\lambda T}} \int_0^T e^{-\lambda s} f(s) ds \quad (11.3.91)$$

从而有

$$a_n = e^{n\lambda T}(a_0 + \beta) - \beta = e^{n\lambda T}(y(0) + \beta) - \beta \quad (11.3.92)$$

故 $\{a_n\}$ 有界当且仅当

$$y(0) = -\beta = \frac{1}{e^{\lambda T} - 1} \int_0^T e^{-\lambda s} f(s) ds \quad (11.3.93)$$

此时有界解的个数为 1。

(2) 由 (1) 的讨论可知, (1) 中所有的有界解都是以 T 为周期的解。

□

第 12 次习题课 高阶微分方程

2024 年 12 月 19 日, 2024 年 12 月 26 日; 2025 年 12 月 31 日。本节对应微积分 A(1) 第 13、14 次习题课的内容。

12.1 知识点复习

12.1.1 可降阶的高阶方程

常见可降阶的高阶方程包括:

(1) 不显含 $y, y', \dots, y^{(k-1)}$ 的高阶方程:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \xrightarrow{u=y^{(k)}} F(x, u, u', \dots, u^{(n-k)}) = 0 \quad (12.1.1)$$

(2) 不显含 x 的高阶方程:

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) \xrightarrow{u=y'} F\left(y, u, \left(u \frac{d}{dy}\right) u, \dots, \left(u \frac{d}{dy}\right)^{n-1} u\right) = 0 \quad (12.1.2)$$

(3) 因式分解法: 设 \mathcal{L} 和 \mathcal{L}_i 为线性微分算子。若线性常微分方程 $\mathcal{L}u = f$ 可因式分解为 $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\cdots\mathcal{L}_m u = f$, 则可逐步求解每一个方程 $\mathcal{L}_i u_i = v_{i-1}$ 实现降阶, 如图 12.1.1 所示。需要注意的是, 这些线性算子之间彼此通常不对易, 因此不能随意交换次序。

(4) Euler 方程: 形如

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = f, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (12.1.3)$$

的方程可通过换元 $t = \ln|x|$ 转化为常系数线性微分方程, 也可以因式分解为以下形式:

$$\left(x \frac{d}{dx} - \lambda_1\right) \left(x \frac{d}{dx} - \lambda_2\right) \cdots \left(x \frac{d}{dx} - \lambda_n\right) y = f \quad (12.1.4)$$

随后采用因式分解法求解。

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_{m-1} \mathcal{L}_m u = f \\
 \downarrow \begin{array}{l} \rightarrow \mathcal{L}_m u = v_{m-1} \\ \downarrow \end{array} \\
 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_{m-1} v_{m-1} = f \\
 \downarrow \begin{array}{l} \rightarrow \mathcal{L}_{m-1} v_{m-1} = v_{m-2} \\ \downarrow \end{array} \\
 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \cdots v_{m-2} = f \\
 \vdots \\
 \downarrow \begin{array}{l} \rightarrow \mathcal{L}_2 v_2 = v_1 \\ \downarrow \end{array} \\
 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 v_2 = f \\
 \downarrow \begin{array}{l} \rightarrow \mathcal{L}_1 v_1 = f \\ \downarrow \end{array} \\
 \mathcal{L}_1 v_1 = f
 \end{array}$$

图 12.1.1: 因式分解法 (自上而下, 正向列方程; 自下而上, 反向解方程)

12.1.2 降维

降维指减少微分方程组中未知函数之间的耦合, 可以降低方程的复杂度, 使方程更易于求解。例如, 若一阶微分方程组具有如下形式:

$$\begin{cases}
 y'_1 = f_1(x, y_1) \\
 y'_2 = f_2(x, y_1, y_2) \\
 \vdots \\
 y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)
 \end{cases} \quad (12.1.5)$$

则可以从第一个方程解出 $y_1(x)$, 将其代入第二个方程, 得到 $y'_2 = f(x, y_1(x), y_2)$, 进而解出 $y_2(x)$; 以此类推。

12.1.3 高阶线性微分方程

首先我们考虑常系数齐次方程。设 P 为多项式 (称为特征多项式), 则方程可表示为

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)y = 0 \quad (12.1.6)$$

若 λ_0 是多项式 P 的 k 重根, 即

$$P(\lambda_0) = P'(\lambda_0) = \cdots = P^{(k-1)}(\lambda_0) = 0, \quad P^{(k)}(\lambda_0) \neq 0 \quad (12.1.7)$$

则

$$e^{\lambda_0 x}, e^{\lambda_0 x} x, \cdots, e^{\lambda_0 x} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \quad (12.1.8)$$

是方程的 k 个线性无关解, 构成解 (子) 空间的一组基。因此, 我们可以通过求解特征方程 $P(\lambda) = 0$ 的所有根, 找到所有 n 个 (线性无关的) 齐次解, 其线性组合即为方程的通解。

非常系数齐次方程没有什么通用的方法, 仅部分可因式分解的方程或 Euler 方程等特殊情况可以求解。

其次考虑非齐次方程, 求解的基本思想是常数变易法。设 \mathcal{L} 为一般的线性微分算子 (可以非常系数), 则方程可表示为

$$\mathcal{L}y = \sum_{i=0}^n a_i(x) \frac{d^i}{dx^i} y = f, \quad a_n(x) = 1 \quad (12.1.9)$$

第一种方法只需找到一个 (非零) 齐次解 y_0 。设 $y(x) = c(x)y_0(x)$, 则

$$f = \mathcal{L}(cy_0) = \sum_{i=0}^n a_i (cy_0)^{(i)} = c \underbrace{\sum_{i=0}^n a_i y_0^{(i)}}_{=\mathcal{L}(y_0)=0} + \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} c^{(j)} y_0^{(i-j)} \quad (12.1.10)$$

令 $u = c'$, 由此可得关于 u 的 $n-1$ 阶线性微分方程, 实现降阶:

$$\sum_{j=1}^n c^{(j)} \sum_{i=j}^n \binom{i}{j} a_i y_0^{(i-j)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{i=k+1}^n \binom{i}{k+1} a_i y_0^{(i-k-1)} \right]}_{\mathcal{L}_1} \frac{d^k}{dx^k} u = f \quad (12.1.11)$$

第二种方法需要找到所有齐次解, 称作 Duhamel 方法或齐次化原理。设

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x) \quad (12.1.12)$$

其中 y_1, y_2, \cdots, y_n 是所有齐次解, c_1, c_2, \cdots, c_n 是待定函数。为了确定这些函数, 引入条件

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \quad (12.1.13)$$

其中矩阵 $W(x) = W[y_1, y_2, \cdots, y_n](x) := \cdots$ 称为齐次解的 Wronsky 矩阵。求解这个线性方程组得到 c_1', c_2', \cdots, c_n' , 积分可得 c_1, c_2, \cdots, c_n , 从而得到非齐次方程的通解。

对于某些特殊的方程, 若能方便求得 (猜到) 非齐次方程的特解, 则可利用“齐次方程的通解+非齐次方程的特解”得到非齐次方程的通解。例如: 若 a_0, a_1, \cdots, a_n 是常数, $f = e^{\alpha x} [\cos(\beta x)P_1(x) + \sin(\beta x)P_2(x)]$, 则可猜测特解为 $y_p = e^{\alpha x} [\cos(\beta x)Q_1(x) + \sin(\beta x)Q_2(x)]$, 其中 P_1, P_2, Q_1, Q_2 是多项式。这个例子可退化至只有多项式、只有三角函数、只有指数函数等其他特殊情况。

例 12.1.1

证明齐次化原理。

证明 记 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$ 、 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$, 则 \mathbf{c}' 满足的线性方程组可表示为:

$$\langle \mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{c}' \rangle = 0, \quad 0 \leq i \leq n-1; \quad \langle \mathbf{y}, \mathbf{c}' \rangle = f \quad (12.1.14)$$

利用数学归纳法可以证明:

- $\langle \mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{c}^{(j)} \rangle = 0$, 其中 $i \geq 0, j \geq 1, i + j \leq n - 1$;
- $\langle \mathbf{y}^{(n-j)}, \mathbf{c}^{(j)} \rangle = (-1)^{j-1} f$, 其中 $1 \leq j \leq n$;

因此

$$\mathcal{L}\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle = \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dx^i} \langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \langle \mathbf{y}^{(i-j)}, \mathbf{c}^{(j)} \rangle \quad (12.1.15)$$

仅保留非零项和 $j = 0$ 和 $i + j = n$, 即

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle &= \sum_{i=0}^n a_i \langle \mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{c} \rangle + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \langle \mathbf{y}^{(n-j)}, \mathbf{c}^{(j)} \rangle = \underbrace{\left\langle \sum_{i=0}^n a_i \mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{c} \right\rangle}_{=\mathcal{L}\mathbf{y}=0} - \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^j f \\ &= 0 + f - f \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j = f - f(1-1)^n = f \end{aligned} \quad (12.1.16)$$

□

12.1.4 二阶线性微分方程

在所有高阶微分方程当中, 二阶线性微分方程最为重要, 所以我们单开一节来讨论它。二阶线性微分方程的一般形式为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (12.1.17)$$

若 $f = 0$ 则称为齐次方程, 否则称为非齐次方程; 若 $p, q = \text{const}$ 则称为常系数方程, 否则称为变系数方程。根据线性方程解的结构“非齐次方程的通解 = 齐次方程的通解 + 非齐次方程的特解”, 我们主要关心齐次方程的通解, 非齐次方程的通解可通过猜特解、常数变易等方法求得。

对于二阶常系数齐次线性方程, 我们可利用熟知的特征方程法: 设 λ 满足一元二次方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, 依据其根的情况总共可分为四类 (或三类):

- (过) 两个不相等的实根 λ_1, λ_2 : 通解为 $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$;
- (临) 两个相等的实根 $\lambda_1 = \lambda_2$: 通解为 $y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x}$;
- (欠) 两个共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$: 通解为 $y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$;
- (无) 两个共轭纯虚根 $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$: 通解为 $y = c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x$ 。

对于二阶变系数齐次线性方程, 若方程可以因式分解, 则可以通过求解两个一阶线性方程来求解; 若不能因式分解, 则需要得到齐次方程的特解 y_1 , 利用常数变易法可设 $y = c(x)y_1(x)$, 代入原方程可得

$$c'' + \left[p(x) + \frac{2y_1'(x)}{y_1(x)} \right] c' = 0 \quad (12.1.18)$$

直接代入式 (11.1.19) (或利用分离变量法) 后积分可得

$$c(x) = C_1 + C_2 \int \exp \left[- \int \left(p + \frac{2y_1'}{y_1} \right) dx \right] dx \quad (12.1.19)$$

注意到

$$\exp \left(- \int \frac{2y_1'}{y_1} dx \right) = \exp \left(-2 \int \frac{dy_1}{y_1} \right) = \exp(-2 \ln y_1) = \frac{1}{y_1^2} \quad (12.1.20)$$

设 P 是 p 的一个原函数, 则原方程的通解为

$$y = c(x)y_1(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{e^{-P(t)}}{y_1(t)^2} dt \quad (12.1.21)$$

如何观察出方程的特解呢? 这通常需要一定的经验和技巧, 例如:

- 若 $\exists m \in \mathbb{R}$ 使得 $m^2 + mp(x) + q(x) = 0$, 则原方程有一特解 $y_p = e^{mx}$;
- 若 $p(x) + xq(x) = 0$, 则原方程有一特解 $y_p = x$;
- 若 p, q 都是有理函数 (包括多项式), 则可以猜测特解为多项式 (不总是靠谱)。

12.2 *扩展阅读：齐次化原理

虽然我们可以直接从 $W\mathbf{c}' = (0, \dots, 0, f)^T$ 出发证明齐次化原理, 但这未免有些“空中楼阁”。我们尝试从更基础的角度来理解它的动机。方便起见, 我们以 t 为自变量, 初始条件均在 $t = 0$ 处给出。

12.2.1 线性算子的叠加原理

设 \mathcal{L} 为线性微分算子, 则对于任意函数 y_1, y_2 和常数 c_1, c_2 , 都有

$$\mathcal{L}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \mathcal{L}(y_1) + c_2 \mathcal{L}(y_2) \quad (12.2.1)$$

以上性质称为线性微分算子的**叠加原理**, 可以很轻松地推广至下面的形式

$$\mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^m c_i y_i \right) = \sum_{i=1}^m c_i \mathcal{L}(y_i) \quad (12.2.2)$$

称为**有限叠加原理**。

我们不妨大胆一些, 将叠加原理推广至 (可数) 无限个函数的形式, 采用指标集 $i \in \mathbb{N}^*$ 、下标 c_i, y_i 与级数求和表述, 即

$$\mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} c_i y_i \right) \simeq \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \mathcal{L}(y_i) \quad (12.2.3)$$

称为**级数叠加原理**。需要注意的是, 这里等号前后的式子并不总是严格相等的, 因为无穷级数的收敛性问题会带来一些麻烦, 所以我们用“ \simeq ”来表示“在适当条件下相等”。此外, 我们实际上并不关心级数的收敛性, 只需要从形式上理解齐次化原理的动机, 思考“认同级数叠加原理”会带来什么结果。

既然如此, 我们不妨更大胆一些, 将叠加原理推广至(不可数)无限个函数的形式, 采用指标集 $\tau \in I$ 、函数值 $c(\tau), y(\cdot, \tau)$ 与积分表述, 即

$$\mathcal{L}\left(\int_I c(\tau)y(t, \tau) d\tau\right) = \mathcal{L}\left(\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_i c(\tau_i)y(t, \tau_i)\Delta\tau\right) \simeq \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_i c(\tau_i)\mathcal{L}(y(t, \tau_i))\Delta\tau = \int_I c(\tau)\mathcal{L}(y(t, \tau)) d\tau \quad (12.2.4)$$

称为**积分叠加原理**。

12.2.2 非齐次项的叠加原理

从线性微分算子的叠加原理出发, 我们很容易地得到非齐次项的叠加原理: 设 \mathcal{L} 为线性微分算子, 对于非齐次方程 $\mathcal{L}y = f$, 我们有

- **有限叠加原理:** 若 $f = \sum_{i=1}^m c_i f_i$, 且 y_i 是方程 $\mathcal{L}y = f_i$ 的一个特解, 则 $y = \sum_{i=1}^m c_i y_i$ 是方程 $\mathcal{L}y = f$ 的一个特解。
- **级数叠加原理:** 若 $f = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i f_i$, 且 y_i 是方程 $\mathcal{L}y = f_i$ 的一个特解, 则在适当条件下 $y = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i y_i$ 是方程 $\mathcal{L}y = f$ 的一个特解。
- **积分叠加原理:** 若 $f(t) = \int_I c(\tau)f(t, \tau) d\tau$, 且 $y(t, \tau)$ 是方程 $\mathcal{L}y = f(t, \tau)$ 的一个特解, 则在适当条件下 $y(t) = \int_I c(\tau)y(t, \tau) d\tau$ 是方程 $\mathcal{L}y = f$ 的一个特解。

需要注意的是, 对于非齐次方程 $\mathcal{L}y = f$, 若其需满足初始条件, 则上述叠加原理仅适用于所有初始条件均齐次(即 $y^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$)的情况。

12.2.3 瞬时冲击与 Green 函数

我们从动态系统的角度去理解微分方程。设 y 是用于描述随时间演化的动态系统的**状态变量**(如位置、温度、电压、产量等), 其**初始状态**由 n 个初始条件决定。系统的**演化规律**由 n 阶线性微分方程 $\mathcal{L}y = f$ 描述, 其中 f 是外部输入(如作用力、热源、电动势、原材料投入等)。系统的**响应** $y(t)$ 取决于初始状态、演化规律 \mathcal{L} 和外部输入 $f(t)$ 。

设系统的所有初始条件均齐次, 我们可以将外部输入 f 视作无数个 τ_i 时刻的“瞬时冲击”的叠加, 即

$$f(t) \simeq \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_i f(\tau_i) \cdot \delta(t - \tau_i, \Delta\tau) \cdot \Delta\tau \quad (12.2.5)$$

其中

$$\delta(t, \Delta\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta\tau}, & t \in \left(-\frac{\Delta\tau}{2}, \frac{\Delta\tau}{2}\right) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12.2.6)$$

亦即 $\delta(t - \tau_i, \Delta\tau)$ 是以 τ_i 为中心、宽度为 $\Delta\tau$ 、面积为 1 的矩形脉冲函数。设 $G(t, \tau_i, \Delta\tau)$ 是系统受到该脉冲的响应, 亦即

$$\mathcal{L}G(t, \tau_i, \Delta\tau) = \delta(t - \tau_i, \Delta\tau) \quad (12.2.7)$$

利用叠加原理，我们可以将系统的响应 $y(t)$ 视作无数个“瞬时冲击响应”的叠加，即

$$y(t) \simeq \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_i f(\tau_i) \cdot G(t, \tau_i, \Delta\tau) \cdot \Delta\tau \quad (12.2.8)$$

整个过程如图 12.2.1 所示。

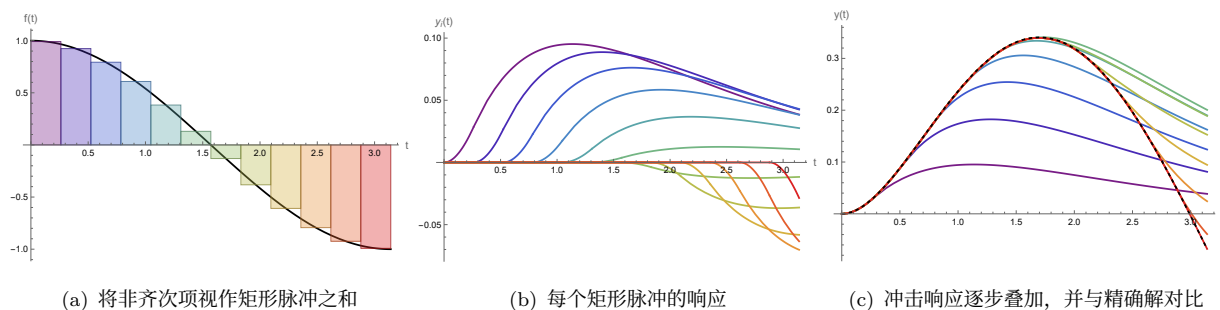


图 12.2.1: 冲击响应的叠加示意图 (以 $y'' + 2y' + y = \cos t$ 为例)

我们形式地令 $\Delta t \rightarrow 0^+$ ，由此得到神奇的 Dirac- δ 函数，其满足

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (12.2.9)$$

则外部输入可表示为

$$f(t) = \int_0^{+\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = (f * \delta)(t) \quad (12.2.10)$$

其中“*”表示卷积运算。由积分叠加原理可知，若 $G(t, \tau)$ 是方程 $\mathcal{L}y = \delta(t - \tau)$ 的一个特解，则在适当条件下

$$y(t) = \int_0^{+\infty} f(\tau) G(t, \tau) d\tau \quad (12.2.11)$$

这里的 $G(t, \tau)$ 称为方程 $\mathcal{L}y = f$ 的 **Green 函数**，它描述了系统在 $t = \tau$ 时刻受到单位冲击时的响应。

12.2.4 基本解方法：求解 Green 函数

那么，如何求解 Green 函数呢？容易发现，Green 函数应当满足以下性质：

- 方程的解：对于 $t \neq \tau$ ， $G(t, \tau)$ 满足齐次方程 $\mathcal{L}y = 0$ ，且在 $t = \tau$ 附近应当满足

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \mathcal{L}G(t, \tau) dt = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \delta(t - \tau) dt = 1, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (12.2.12)$$

- 连续性：当 $t \neq \tau$ 时， G 应当至少具有 n 阶连续导数。
- 因果性：系统在 $t < \tau$ 时刻受到 $t = \tau$ 的冲击时，不会产生响应，故 $G(t, \tau) = 0$ ($\forall t < \tau$)。

具体而言, 设 \mathcal{L} 为 n 阶线性微分算子, 其可表示为

$$\mathcal{L} = \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t) \frac{d}{dt} + a_0(t) \quad (12.2.13)$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 在 $t = \tau$ 处连续, 代入积分表达式中可得

$$\begin{aligned} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \mathcal{L}G(t, \tau) dt &= \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \left[G^{(n)}(t, \tau) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) G^{(i)}(t, \tau) \right] dt \\ &= G^{(n-1)}(\tau + \varepsilon, \tau) - G^{(n-1)}(\tau - \varepsilon, \tau) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} a_i(t) G^{(i)}(t, \tau) dt \\ &= G^{(n-1)}(\tau + \varepsilon, \tau) - G^{(n-1)}(\tau - \varepsilon, \tau) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\tau_i) \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} G^{(i)}(t, \tau) dt \\ &= G^{(n-1)}(\tau + \varepsilon, \tau) - G^{(n-1)}(\tau - \varepsilon, \tau) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\tau_i) [G^{(i-1)}(\tau + \varepsilon, \tau) - G^{(i-1)}(\tau - \varepsilon, \tau)] \end{aligned} \quad (12.2.14)$$

其中 $\tau_i \in [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$, $G^{(-1)}(t, \tau) := \int_0^t G(s, \tau) ds$. 结合 $G(t, \tau) = 0$ ($\forall t < \tau$) 可得

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \mathcal{L}G(t, \tau) dt = G^{(n-1)}(\tau + \varepsilon, \tau) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\tau_i) G^{(i-1)}(\tau + \varepsilon, \tau) \quad (12.2.15)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 可得

$$G^{(n-1)}(\tau^+, \tau) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\tau) G^{(i-1)}(\tau^+, \tau) = 1 \quad (12.2.16)$$

为了尽可能使上式简单, 可令 G 在 $t = \tau$ 处的 $n-2$ 阶导数连续, 而其 $n-1$ 阶导数在 $t = \tau$ 处有单位跳跃, 即

$$\begin{cases} G^{(i)}(\tau^+, \tau) = 0, & 0 \leq i \leq n-2 \\ G^{(n-1)}(\tau^+, \tau) = 1 \end{cases} \quad (12.2.17)$$

为了求出 $t > \tau$ 时的 Green 函数, 注意到此时 $G(\cdot, \tau)$ 满足齐次方程 $\mathcal{L}y = 0$, 故可用齐次方程的 n 个线性无关的解 y_1, y_2, \cdots, y_n 将其表示为

$$G(t, \tau) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\tau) y_i(t), \quad t > \tau \quad (12.2.18)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是待定常数(其只与 t 无关, 但仍可与 τ 有关)。将上式代入连续性条件中, 可得关于 $\lambda(\tau) = (\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \cdots, \lambda_n(\tau))^T$ 的线性方程组:

$$\begin{pmatrix} y_1(\tau) & y_2(\tau) & \cdots & y_n(\tau) \\ y_1'(\tau) & y_2'(\tau) & \cdots & y_n'(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(\tau) & y_2^{(n-1)}(\tau) & \cdots & y_n^{(n-1)}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(\tau) \\ \lambda_2(\tau) \\ \vdots \\ \lambda_n(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12.2.19)$$

上式左侧的矩阵即为齐次解的 Wronsky 矩阵 $W[y_1, y_2, \dots, y_n](\tau)$ 。记 $e_n = (0, 0, \dots, 1)^T$ ，则 λ 可表示为

$$W(\tau)\lambda(\tau) = e_n \implies \lambda(\tau) = W(\tau)^{-1}e_n \quad (12.2.20)$$

记 $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$ ，则 Green 函数可表示为

$$G(t, \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ \langle y(t), W(\tau)^{-1}e_n \rangle, & t > \tau \end{cases} \quad (12.2.21)$$

12.2.5 齐次化原理与常数变易法

求解出 Green 函数后，满足齐次初始条件的非齐次方程 $\mathcal{L}y = f$ 的特解可表示为

$$y(t) = \int_0^{+\infty} f(\tau)G(t, \tau) d\tau = \int_0^t \langle y(t), W(\tau)^{-1}e_n f(\tau) \rangle d\tau = \sum_{i=1}^n y_i(t) \underbrace{\int_0^t [W(\tau)^{-1}e_n]_i f(\tau) d\tau}_{c_i(t)} \quad (12.2.22)$$

其中 $[\cdot]_i$ 表示向量的第 i 个分量。由于 c_i 以积分的形式表达，故可求导得到

$$c'_i(t) = [W(t)^{-1}e_n]_i f(t) \implies W(t) \begin{pmatrix} c'_1(t) \\ c'_2(t) \\ \vdots \\ c'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (12.2.23)$$

这正是齐次化原理中用于确定待定函数 c_1, c_2, \dots, c_n 的线性方程组。因此，齐次化原理实际上是从积分叠加原理出发，通过求解 Green 函数而得到的。

如果要求出非齐次方程的通解，则只需将齐次方程的通解加到上述特解上即可，即

$$y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \left[C_i + \int_0^t [W(\tau)^{-1}e_n]_i f(\tau) d\tau \right] \quad (12.2.24)$$

其中 C_1, C_2, \dots, C_n 为任意常数。

12.3 补充习题

12.3.1 可降阶的高阶方程

例 12.3.1

设函数 $y = y(x)$ 的曲率为常数 $\kappa > 0$ ，求 $y(x)$ 。

解 由曲率的定义可得

$$\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \kappa \quad (12.3.1)$$

故 $|y''| \neq 0$ 。由导函数的介质性知 y'' 不变号, 故不妨设 $y'' > 0$ 。令 $u = y'$, 则

$$u' = \kappa(1+u^2)^{3/2} \implies \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} = \kappa dx \quad (12.3.2)$$

两边积分可得

$$\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \kappa x + C_1 \implies \frac{dy}{dx} = u = \frac{\kappa x + C_1}{\sqrt{1-(\kappa x + C_1)^2}} \quad (12.3.3)$$

两边积分可得

$$y = -\frac{\sqrt{1-(\kappa x + C_1)^2}}{\kappa} + C_2 \implies \left(x + \frac{C_1}{\kappa}\right)^2 + (y - C_2)^2 = \frac{1}{\kappa^2} \quad (12.3.4)$$

□

例 12.3.2

求解以下微分方程:

$$xy'' - (x+1)y' + y = x^2e^x \quad (12.3.5)$$

解 因式分解可得

$$\left(x \frac{d}{dx} - 1\right) \left(\frac{d}{dx} - 1\right) y = x^2e^x \quad (12.3.6)$$

这等价于微分方程组

$$\begin{cases} y' - y = z \\ xz' - z = x^2e^x \end{cases} \quad (12.3.7)$$

对于第二个方程, 配凑积分因子可得

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{z}{x}\right) = e^x \implies z = x \int e^x dx = xe^x + C_1x \quad (12.3.8)$$

对于第一个方程, 配凑积分因子可得

$$\frac{d}{dx} (e^{-x}y) = x + C_1xe^{-x} \implies y = e^x \int (x + C_1xe^{-x}) dx = \frac{1}{2}x^2e^x - C_1(x+1) + C_2e^x \quad (12.3.9)$$

□

另解 首先求解齐次方程:

$$\left(x \frac{d}{dx} - 1\right) \left(\frac{d}{dx} - 1\right) y = 0 \quad (12.3.10)$$

由 $y' - y = 0$ 解得 $y = Ce^x$ 。利用常数变易法可设 $y = C(x)e^x$, 代入原方程可得

$$e^x [xC'' + (x-1)C'] = x^2e^x \implies xC'' + (x-1)C' = x^2 \quad (12.3.11)$$

这是关于 C' 的一阶线性微分方程 (由此实现降阶), 配凑积分因子可得

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{e^x C'}{x} \right) = \frac{e^x}{x^2} [x C'' + (x-1) C'] = e^x \implies C' = x e^{-x} (e^x + C_1) = x + C_1 x e^{-x} \quad (12.3.12)$$

积分可得

$$C = \int (x + C_1 x e^{-x}) dx = \frac{1}{2} x^2 - C_1 (x+1) e^{-x} + C_2 \quad (12.3.13)$$

从而

$$y = \frac{1}{2} x^2 e^x - C_1 (x+1) + C_2 e^x \quad (12.3.14)$$

□

例 12.3.3

求解以下微分方程:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x \quad (12.3.15)$$

解 因式分解可得

$$\left(x \frac{d}{dx} - 1 \right) \left(x \frac{d}{dx} - 2 \right) = 2x \quad (12.3.16)$$

这等价于微分方程组

$$\begin{cases} xy' - y = z \\ xz' - 2z = 2x \end{cases} \quad (12.3.17)$$

对于第二个方程, 配凑积分因子可得

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{z}{x^2} \right) = \frac{2}{x^2} \implies z = x^2 \int \frac{2}{x^2} dx = -2x + C_1 x^2 \quad (12.3.18)$$

对于第一个方程, 配凑积分因子可得

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x^2} (-2x + C_1 x^2) \implies y = x \int \frac{1}{x^2} (-2x + C_1 x^2) dx = -2x \ln x + C_1 x^2 + C_2 x \quad (12.3.19)$$

□

另解 仿照上例, 借助常数变易法。

□

12.3.2 高阶线性微分方程

例 12.3.4

设 $\alpha \neq \beta$, 利用适当的微分方程证明以下函数线性无关:

$$e^{\alpha x}, \quad e^{\alpha x}x, \quad e^{\alpha x}\frac{x^2}{2}, \quad e^{\beta x}, \quad e^{\beta x}x, \quad e^{\beta x}\frac{x^2}{2} \quad (12.3.20)$$

解 设常数 C_1, C_2, \dots, C_6 使得

$$y := C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}x + C_3 e^{\alpha x}\frac{x^2}{2} + C_4 e^{\beta x} + C_5 e^{\beta x}x + C_6 e^{\beta x}\frac{x^2}{2} = 0 \quad (12.3.21)$$

注意到

$$\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right) e^{\alpha x} \frac{x^n}{n!} = e^{\alpha x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right) e^{\beta x} = (\beta - \alpha)e^{\beta x} \quad (12.3.22)$$

逐次求导可得

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)^3 \left(\frac{d}{dx} - \beta\right)^2 y = \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)^3 C_6 e^{\beta x} = C_6 (\beta - \alpha)^3 e^{\beta x} \\ 0 &= \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)^2 \left(\frac{d}{dx} - \beta\right)^3 y = \left(\frac{d}{dx} - \beta\right)^3 C_3 e^{\alpha x} = C_3 (\alpha - \beta)^3 e^{\alpha x} \end{aligned} \quad (12.3.23)$$

故 $C_3 = C_6 = 0$ 。继续求导可得

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)^2 \left(\frac{d}{dx} - \beta\right) y = \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)^2 C_5 e^{\beta x} = C_5 (\beta - \alpha)^2 e^{\beta x} \\ 0 &= \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right) \left(\frac{d}{dx} - \beta\right)^2 y = \left(\frac{d}{dx} - \beta\right)^2 C_2 e^{\alpha x} = C_2 (\alpha - \beta)^2 e^{\alpha x} \end{aligned} \quad (12.3.24)$$

故 $C_2 = C_5 = 0$ 。继续求导可得

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right) y = \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right) C_4 e^{\beta x} = C_4 (\beta - \alpha) e^{\beta x} \\ 0 &= \left(\frac{d}{dx} - \beta\right) y = \left(\frac{d}{dx} - \beta\right) C_1 e^{\alpha x} = C_1 (\alpha - \beta) e^{\alpha x} \end{aligned} \quad (12.3.25)$$

故 $C_1 = C_4 = 0$ 。综上所述, 这些函数线性无关。 \square

例 12.3.5

求解以下微分方程:

$$y^{(4)} - y^{(3)} - 3y'' + y' + 2y = 3x + 4 \quad (12.3.26)$$

解 先考虑齐次方程, 特征多项式为

$$\lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 = 0 \quad (12.3.27)$$

因此齐次方程解空间的基为 $e^{2x}, e^x, e^{-x}, xe^{-x}$, 即齐次方程的通解为

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} \quad (12.3.28)$$

接下来寻找非齐次方程的特解。设 $y_p = Ax + B$, 代入原方程可得

$$A + 2(Ax + B) = 3x + 4 \implies A = \frac{3}{2}, \quad B = \frac{5}{4} \quad (12.3.29)$$

故非齐次方程的通解为

$$y = y_h + y_p = \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} + C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} \quad (12.3.30)$$

□

例 12.3.6

求解以下微分方程:

$$y'' + y = \sin x \quad (12.3.31)$$

解 令 $z' = y$, 把上述二阶方程改写为一阶方程组

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix} \quad (12.3.32)$$

齐次部分的一对线性无关解为

$$\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \quad (12.3.33)$$

它们给出可逆矩阵

$$U(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad U'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} U(x) \quad (12.3.34)$$

设 y 是非齐次方程的解, 且满足

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = U(x) \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix} \quad (12.3.35)$$

则

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = U(x) \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix} \quad (12.3.36)$$

所以

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = U^{-1}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^2 x \\ \sin x \cos x \end{pmatrix} \implies \begin{cases} C_1(x) = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{x}{2} + A \\ C_2(x) = -\frac{1}{4} \cos 2x + B \end{cases} \quad (12.3.37)$$

因此

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x = \frac{1}{4} \cancel{\sin x} - \frac{x}{2} \cos x + A \cos x + B \sin x \quad (12.3.38)$$

□

例 12.3.7

求解以下微分方程:

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0 \quad (12.3.39)$$

解 令 $t = \ln |x|$, 则

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \\ y'' &= \frac{dy'}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned} \quad (12.3.40)$$

代入原方程可得

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (12.3.41)$$

解得

$$y = (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t) e^{-t} = (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \ln |x|) \frac{1}{|x|} = \frac{C_1 + C_2 \ln |x|}{x} \quad (12.3.42)$$

□

12.3.3 有关高阶微分方程的证明题

例 12.3.8

设 $f \in \mathcal{C}[a, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. 证明: 微分方程

$$y'' + 3y' + 2y = f(x) \quad (12.3.43)$$

的所有解 $y = y(x)$ 均满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

证明 左侧的微分算子可因式分解得

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + 3\frac{d}{dx} + 2 \right) y = \left(\frac{d}{dx} + 2 \right) \left(\frac{d}{dx} + 1 \right) y \quad (12.3.44)$$

利用两次积分因子法和 $\frac{*}{\infty}$ 型 L'Hôpital 法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (y + y') &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}(y + y')}{e^{2x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}(y'' + 3y' + 2y)}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x y}{e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (y' + y)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y + y') = 0 \end{aligned} \quad (12.3.45)$$

□

注 对于任意 $y'' + py' + qy = f(x)$, 若特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 有两个负实根, 则结论 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ 成立。证明方法同上。

例 12.3.9

对于微分方程

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), & x \in (a, b) \\ y(a) = A, \quad y(b) = B \end{cases} \quad (12.3.46)$$

其中 $q(x) < 0$, A, B 为常数, 证明: 若其在 $[a, b]$ 上有连续的解, 则解必定唯一。

证明 设 y_1, y_2 均为满足给定边界条件的微分方程的解, 令 $y = y_1 - y_2$, 则 y 满足

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, & x \in (a, b) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \quad (12.3.47)$$

采用反证法, 假设 $y \not\equiv 0$, 则其在 $[a, b]$ 上至少有一个最值不为 0。不妨设 y 在 $x_0 \in (a, b)$ 处取得正的最大值 (否则可以考虑 $-y$), 则 $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) = 0$ 且 $y''(x_0) \leq 0$ 。将 x_0 代入微分方程得

$$0 = y''(x_0) + p(x_0)y'(x_0) + q(x_0)y(x_0) = y''(x_0) + q(x_0)y(x_0) \leq q(x_0)y(x_0) < 0 \quad (12.3.48)$$

矛盾! 因此 $y \equiv 0$, 亦即 $y_1 = y_2$ 。 \square

另证 同理设出 y 。考虑 Sturm-Liouville 标准式

$$(\tilde{p}y')' + \tilde{q}y = 0 \implies y'' + \frac{\tilde{p}'}{\tilde{p}}y' + \frac{\tilde{q}}{\tilde{p}}y = 0 \quad (12.3.49)$$

所以

$$\tilde{p}(x) = e^{\int_a^x p(t) dt} > 0, \quad \tilde{q}(x) = \tilde{p}(x)q(x) < 0 \quad (12.3.50)$$

因此

$$0 \leq \int_a^b -\tilde{q}y^2 dx = \int_a^b y(\tilde{p}y')' dx = \tilde{p}y'y|_{x=a}^b - \int_a^b \tilde{p}(y')^2 dx = - \int_a^b \tilde{p}(y')^2 dx \leq 0 \quad (12.3.51)$$

由于 $y \in \mathcal{C}(a, b)$, 故 $y \equiv 0$, 亦即 $y_1 = y_2$ 。 \square

注 本题提供的微分方程定解条件并非初始条件 (初值问题), 而是边界条件 (边值问题)。本题是 Sturm-Liouville 定理的推论, 另证的做法可以将边界条件推广为

$$\begin{cases} c_1y(a) - d_1y'(a) = A \\ c_2y(b) + d_2y'(b) = B \end{cases} \quad (12.3.52)$$

其中 $c_1, c_2, d_1, d_2 \geq 0$ 且 $c_1^2 + d_1^2 > 0$, $c_2^2 + d_2^2 > 0$, 此时始终有 (注意下式中 $y = y_1 - y_2$ 应当满足齐次边界条件 $A = B = 0$)

$$\tilde{p}y'y|_{x=a}^b = \tilde{p}(b)y'(b)y(b) - \tilde{p}(a)y'(a)y(a) \leq 0 \quad (12.3.53)$$

例 12.3.10 (2023 秋期末考试 · 18, Sturm 零点分离定理)

设 y_1, y_2 为二阶线性齐次常微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个线性无关解, 其中 p, q 为开区间 J 上的连续函数。证明 y_1, y_2 的零点相互分离, 即在 y_1 的任意两个零点之间, 必存在 y_2 的一个零点, 反之亦然。

证明 由于 y_1, y_2 线性无关, 则 $W(x) := W[y_1, y_2](x) \neq 0, \forall x \in J$ 。由于 W 连续, 不妨设 $W(x) < 0, \forall x \in J$ 。设 x_0, x_1 为 y_1 的相邻零点, 则 $W(x_0) = -y_1'(x_0)y_2(x_0)$, 故 $y_1'(x_0), y_2(x_0)$ 同号, 不妨设它们均为正数。同时在 $x = x_1$ 处, 有 $W(x_1) = -y_1'(x_1)y_2(x_1)$ 。由于 x_0, x_1 为 y_1 的相邻零点, 故 $y_1'(x_1) < 0$ 。设 $y_1'(x_1) > 0$, 则 $\exists x_2 \in (x_0, x_0 + \delta)$ 使得 $y_1(x_2) > y_1(x_0) = 0, \exists x_3 \in (x_1 - \delta, x_1)$ 使得 $y_1(x_3) < y_1(x_1) = 0$, 由介值定理可得 $\exists x_4 \in (x_2, x_3)$ 使得 $y_1(x_4) = 0$, 这与 x_0, x_1 为 y_1 的相邻零点矛盾。

因而 $y_2(x_1) < 0$, 故 $\exists x_2 \in (x_0, x_1)$ 使得 $y_2(x_2) = 0$ 。假设 $\exists x_3 \in (x_0, x_1)$ 且 $x_3 \neq x_2$ 使得 $y_2(x_3) = 0$, 则对 (x_2, x_3) 或 (x_3, x_2) 重复上述操作可得 $\exists x_4 \in (x_2, x_3)$ 使得 $y_1(x_4) = 0$, 这与 x_0, x_1 为 y_1 的相邻零点矛盾。故 y_2 在 (x_0, x_1) 上有唯一零点 x_2 。

综上所述, 命题得证。 □

12.4 讲义习题

12.4.1 线性微分方程

例 12.4.1 (习题 8.4.2)

设 $n \neq 0$ 且 $n \neq 1$, 将 Bernoulli 方程 $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ 变为线性微分方程。

解 令 $z = y^{1-n}$, 则 n 满足的方程为

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x) \quad (12.4.1)$$

□

例 12.4.2 (习题 8.4.3)

给定 Riccati 方程 $y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$ 。

(1) 证明: 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是 Riccati 方程的任意两个解, 则 $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$ 满足某个 Bernoulli 方程, 并求出该 Bernoulli 方程;

(2) 验证 $y = \frac{1}{x}$ 是 $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$ 的一个解, 并求出该方程的通解。

解 (1) 由题可得

$$\begin{cases} y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 - f(x) = 0 \\ y_2' + p(x)y_2 + q(x)y_2^2 - f(x) = 0 \end{cases} \quad (12.4.2)$$

两式相减可得

$$z' + p(x)z + q(x)z(z + 2y_2) = 0 \implies z' + [p(x) + 2q(x)y_2(x)]z = -q(x)z^2 \quad (12.4.3)$$

(2) 验证略。设另一个解为 $y = \frac{1}{x} + z$, 则 z 满足的微分方程为

$$z' = \frac{2}{x}z + z^2 \implies -\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{x}\frac{1}{z} + 1 = 0 \quad (12.4.4)$$

利用积分因子 x^2 可得

$$\left(\frac{x^2}{z}\right)' = -x^2\frac{z'}{z} + \frac{2x}{z} = -x^2 \implies \frac{x^2}{z} = -\frac{1}{3}(x^3 + C_1) \implies z = -\frac{3x^2}{x^3 + C_1} \quad (12.4.5)$$

故原方程的通解为

$$y = \frac{1}{x} - \frac{3x^2}{x^3 + C_1} \quad (12.4.6)$$

□

例 12.4.3 (习题 8.4.4)

求解以下微分方程:

$$2yy'' - y'^2 = 0 \quad (12.4.7)$$

解 求导可得

$$2yy^{(3)} = 0 \implies y = 0 \vee y^{(3)} = 0 \implies y(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (12.4.8)$$

但这造成了增解, 因为二阶微分方程的通解只能有两个任意常数, 所以需要代入原方程验证, 即

$$2(Ax^2 + Bx + C) \cdot 2A - (2Ax + B)^2 = 0 \implies 4AC = B^2 \quad (12.4.9)$$

所以原方程的通解为

$$y(x) = Ax^2 \pm 2\sqrt{AC}x + C, \quad AC \geq 0 \quad (12.4.10)$$

□

另解 用通常的降阶法, 设 $u = y'$, 则 $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$, 故有

$$2yu \frac{du}{dy} - u^2 = 0 \implies u = 0 \vee 2\frac{du}{u} = \frac{dy}{y} \quad (12.4.11)$$

解得 y 为常值函数或 $u^2 = C|y|$, 即

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C|y|} = 2C_1\sqrt{|y|} \implies \sqrt{|y|} = C_1x + C_2 \quad (12.4.12)$$

所以原方程的通解为

$$y = \pm(C_1x + C_2)^2 \quad (12.4.13)$$

□

例 12.4.4 (习题 8.4.5)

试写出一个二阶线性微分方程使得 $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x-1}$ 都是该微分方程的解。

解 我们考虑更一般性的问题: 设 y_1, y_2 满足二阶线性微分方程

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (12.4.14)$$

代入 y_1, y_2 可得

$$\begin{cases} a_0(x)y_1 + a_1(x)y_1' = -y_1'' \\ a_0(x)y_2 + a_1(x)y_2' = -y_2'' \end{cases} \quad (12.4.15)$$

利用 Cramer 法则可得

$$a_1(x) = \frac{y_2y_1'' - y_1y_2''}{W[y_1, y_2]}, \quad a_0(x) = \frac{y_1'y_2'' - y_2'y_1''}{W[y_1, y_2]} \quad (12.4.16)$$

其中 $W[y_1, y_2] = y_1y_2' - y_2y_1'$ 表示 Wronsky 行列式。代入 $y_1 = \frac{1}{x}$ 、 $y_2 = \frac{1}{x-1}$ 可得

$$y'' + \frac{2-4x}{x-x^2}y' + \frac{2}{x^2-x}y = 0 \quad (12.4.17)$$

□

例 12.4.5 (习题 8.4.7)

求区间 $(-1, +\infty)$ 上的可微函数 f 使得

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 0, \quad f(0) = 1 \quad (12.4.18)$$

解 令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 F 二阶可微且满足 $F'(x) = f(x)$, 故有 F 满足以下微分方程:

$$F'' + F' - \frac{1}{x+1}F = 0, \quad F(0) = 0, F'(0) = 1 \quad (12.4.19)$$

容易观察到 F 的特解为 $F(x) = x+1$, 代入式 (12.1.21) 可得

$$F(x) = C_1(x+1) + C_2(x+1) \int_0^x \frac{e^{-t}}{(t+1)^2} dt \quad (12.4.20)$$

代入初值条件可得

$$C_1 = 0, \quad C_1 + C_2 = 1 \implies F(x) = (x+1) \int_0^x \frac{e^{-t}}{(t+1)^2} dt \quad (12.4.21)$$

因此

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^{-x}}{x+1} + \int_0^x \frac{e^{-t}}{(t+1)^2} dt \quad (12.4.22)$$

□

12.4.2 常系数线性微分方程 (组)

例 12.4.6 (习题 8.6.1)

设 $a \in \mathbb{R}$ 、 b 是可微函数且恒正, 求解以下微分方程:

$$y'' + \frac{b'}{b}y' - \frac{a^2}{b^2}y = 0 \quad (12.4.23)$$

解 考虑变换 $u = u(x)$, 使得原方程变为 $y = y(u)$ 的常系数线性方程。注意到

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \frac{dy}{du} = u' \frac{dy}{du} \\ y'' &= \frac{d}{dx} \left(u' \frac{dy}{du} \right) = u'' \frac{dy}{du} + u' \frac{du}{dx} \frac{d^2y}{du^2} = u'' \frac{dy}{du} + u'^2 \frac{d^2y}{du^2} \end{aligned} \quad (12.4.24)$$

代入原方程可得

$$u'^2 \frac{d^2y}{du^2} + \left(u'' + \frac{b'}{b} u' \right) \frac{dy}{du} - \frac{a^2}{b^2} y = 0 \quad (12.4.25)$$

利用积分因子 $\exp \int \frac{b'}{b} dx = b$ 可恰好将其凑成

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{(u'b)'}{u'^2 b} \frac{dy}{du} - \frac{a^2}{(u'b)^2} y = 0 \quad (12.4.26)$$

故可令 $u'b = 1$, 即 $u(x) = \int_{x_0}^x \frac{dt}{b(t)}$, 则原方程可化为

$$\frac{d^2y}{du^2} - a^2 y = 0 \implies y = C_1 e^{au(x)} + C_2 e^{-au(x)} \quad (12.4.27)$$

□

例 12.4.7 (习题 8.6.2)

求解以下微分方程:

$$2x^2 y'' + a(1 + xy')^2 + xy' - 1 = 0 \quad (12.4.28)$$

解 由于方程只包含 xy' 和 $x^2 y''$, 故可尝试 Euler 方程的换元法: 令 $t = \ln|x|$, 则有

$$\begin{aligned} xy' &= x \frac{dt}{dx} \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} \\ x^2 y'' &= x^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) = x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \frac{dt}{dx} \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \end{aligned} \quad (12.4.29)$$

再令 $p = \frac{dy}{dt}$, 代入原方程可得

$$2 \left(\frac{dp}{dt} - p \right) + a(1+p)^2 + p - 1 = 0 \implies 2 \frac{dp}{dt} + (a-1+ap)(1+p) = 0 \quad (12.4.30)$$

解得

$$\frac{dy}{dt} = p = \frac{(1-a)e^{t/2} - C_1}{ae^{t/2} - C_1} \quad (12.4.31)$$

积分可得

$$y = \begin{cases} -t + \frac{2}{a} \ln(ae^{t/2} + C_1) + C_2, & a \neq 0 \\ -t + \frac{2}{C_1} e^{t/2} + C_2, & a = 0 \end{cases} \quad (12.4.32)$$

代回 $t = \ln|x|$, 重新选择 C_1, C_2 可得原方程的通解为

$$y = \begin{cases} -\ln|x| + \frac{2}{a} \ln(\sqrt{|x|} + C_1) + C_2, & a \neq 0 \\ -\ln|x| + \frac{2}{C_1} \sqrt{|x|} + C_2, & a = 0 \end{cases} \quad (12.4.33)$$

□